1553

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

par

Shinsuke WATANABE

Sujet : Solitons Acoustiques Ioniques dans un plasma : Théorie et Expérience.

Soutenue le 13 Octobre 1975 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. DELCROIX Président

M. FITAIRE
K. CHADAN
Y. FURUTANI } Examinateurs
D. GRESILLON
A. MANGENEY

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544725_0019

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

par

Shinsuke WATANABE

Sujet : Solitons Acoustiques Ioniques dans un plasma : Théorie et Expérience.

Soutenue le Octobre 1975 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. DELCROIX Président

M. FITAIRE
K. CHADAN
Y. FURUTANI } Examinateurs
D. GRESILLON
A. MANGENEY

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.L. DELCROIX de m'avoir accueilli dans son laboratoire pendant toute la durée de ce travail et d'avoir accepté de présider le Jury.

J'exprime ma profonde gratitude à Messieurs M. FITAIRE et K. CHADAN qui ont consenti avec bienveillance à faire partie du jury.

J'adresse tous mes remerciements à Messieurs Y. FURUTANI, A. MANGENEY, C. POMOT, D. GRESILLON, J. HARDY et T. MANTEI pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec eux et pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de la mise en forme définitive de ce mémoire. Je remercie enfin Messieurs E. BLOYET et J. GODIOT pour leur assistance technique efficace qui m'a permis d'effectuer une série d'expériences dans les délais les plus brefs.

SOMMAIRE

INTRODUCTION..... 1

CHAPITRE 1. GENERALITES..... 5

1. Relation de dispersion de l'onde acoustique ionique.. 5
2. Equation de Korteweg-de Vries..... 7
3. Linéarisation de l'équation de K-dV..... 9
4. Propriétés de soliton.....10
5. Méthode de résolution de l'équation de K-dV.....12
   5.1. Méthode des lois de conservation.....12
   5.2. Méthode de la diffusion inverse.....16

Références.....21

CHAPITRE 2. FORMATION ET RECURRENCE DE SOLITON ACOUSTIQUE IONIQUE.....23

1. Introduction.....23
2. Equation du couplage de modes et sa solution.....23
   2.1. Equation du couplage de modes.....23
   2.2. Cas $\Delta S = 0$.....26
   2.3. Cas $\Delta S \neq 0$.....27
   2.4. Effet d'amortissement d'onde.....30
3. Récurrence d'un état initial.....31
4. Solitons.....35
5. Résumé des résultats.....37
6. Discussion.....38

Références.....40

CHAPITRE 3. SOLITONS ENGENDRES PAR UNE IMPULSION.....41

1. Introduction.....41
2. Méthode expérimentale.....42
3. Résultats expérimentaux.....43
   3.1. Propriétés dispersives.....44
   3.2. Condition pour la formation des solitons.....44

3.3. Propriétés fondamentales des solitons.....46
3.4. Collision de front entre deux solitons.....47
4. Discussion.....47
Références.....51

CHAPITRE 4. RECURRENCE DE L'ONDE IONIQUE NON-LINEAIRE.....52

1. Introduction.....52
2. Méthode expérimentale.....54
3. Résultats expérimentaux.....54
3.1. Relation de dispersion.....54
3.2. Récurrence de l'onde ionique.....56
3.3. Accroissement de la longueur de récurrence...58
3.4. Trajectoire des pics.....59
4. Discussion.....60
Références.....63

CHAPITRE 5. CONCLUSION.....64

FIGURES ET LEGENDES.

o o
o

INTRODUCTION

Korteweg et de Vries ont établi une équation différentielle non-linéaire aux dérivées partielles décrivant la propagation des ondes de gravité dans un canal peu profond[1]. L'équation portant ainsi leur nom (K-dV) admet une solution : le soliton. L'intérêt porté à l'équation de K-dV s'est accru depuis que Zabusky et Kruskal[2] ont donné une solution numérique et montré des propriétés particulières du soliton. Actuellement l'équation de K-dV est souvent utilisée comme équation modèle pour décrire une propagation non-linéaire des ondes dans un milieu dispersif.

Le soliton est une onde dont le profil est stable au cours de la propagation, par suite d'une compétition entre l'effet dispersif et l'effet non-linéaire. La forme du profil peut, en général, être approximée par l'inverse du carré de la fonction cosinus-hyperbolique. Il est bien connu qu'une telle onde pulsée, en propagation dans un milieu dispersif non-linéaire, peut exister non seulement comme solution de l'équation de K-dV mais aussi comme solution d'autres types d'équations non-linéaires. Citons, à titre d'exemple, l'équation de Schrödinger non-linéaire[3]. Sa solution représente un soliton-enveloppe donné par l'inverse de la fonction cosinus-hyperbolique. L'équation de sinus-Gordon[4] a aussi une solution du type soliton.

L'une des méthodes les plus sophistiquées, permettant d'établir une équation différentielle non-linéaire qui décrit la propagation d'ondes non-linéaires dans un milieu dispersif, est la méthode de perturbation raductive[5] que Taninti et ses collaborateurs ont mise au point. Pour ce qui est de l'onde électrostatique dans un plasma, l'onde électronique est décrite par l'équation de Schrödinger non-linéaire[3]. L'onde ionique de basse fréquence est décrite par l'équation de K-dV[6] pour le petit k et par l'équation de Schrödinger non-linéaire[7] pour le grand k, où k est le nombre d'onde.

Berezin et Karpman ont obtenu les premiers une solution analytique de l'équation de K-dV[8], en utilisant les lois de conservation associées à cette équation. Par la suite, Gardner et al.[9] en ont donné une solution générale à l'aide de la méthode de diffusion inverse couramment utilisée en mécanique quantique. Cette méthode, très puissante, a permis de donner une solution de N solitons pour l'équation de K-dV[10], l'équation de Schrödinger non-linéaire[11] et l'équation de K-dV modifiée[12].

A l'appui de l'analyse numérique, Zabusky et Kruskal[2] ont montré qu'un grand nombre de solitons a été formé à partir d'une condition initiale sinusoïdale et vérifié qu'après la collision successive entre les solitons ceux-ci retrouvent leur état initial. Il est évident que ce phénomène de récurrence est étroitement lié au problème de Fermi-Pasta-Ulam[13]. Tappert et Judice[14] ont obtenu le temps (ou la distance) de récurrence de l'onde ionique à partir de l'équation de K-dV qui tient compte de l'effet de la température ionique[15].

Nous avons pris, dans notre travail, un autre point de vue : on peut considérer l'équation de K-dV comme équation du couplage des modes. En effet, cette dernière qu'on obtient par la décomposition d'une amplitude de l'équation de K-dV en un mode de fréquence donnée et ses harmoniques permet d'expliquer le phénomène de récurrence. Par ailleurs, la superposition de ces ondes permet de reconstituer approximativement le soliton[16].

La première mise en évidence d'un soliton dans un plasma a été réalisée par Ikezi et al.[17] qui ont observé le soliton sur le mode ionique au moyen du dispositif D.P.. Hershkowitz et al.[18], eux, ont expérimentalement étudié les solitons en faisant varier des conditions initiales. Ikezi[19] a raffiné cette expérience plus tard.

Une expérience sur la récurrence de l'onde ionique a été réalisée par Ikezi[19]. On peut bien expliquer ses résultats expérimentaux à l'aide de l'équation de couplage des modes déduite de l'équation de K-dV[16]. Watanabe et al. ont observé, dans un plasma faiblement instable, la récurrence de l'onde ionique[20]. La longueur de récurrence s'est révélée en bon accord avec une valeur donnée par Tappert et Judice.

L'intérêt de l'étude de l'équation de K-dV et du soliton porte sur les trois points suivants : i) Le soliton, ainsi que le soliton-enveloppe, sont les ondes fondamentales dans un milieu dispersif non-linéaire. De ce fait, c'est un phénomène nouveau qui diffère complètement des ondes linéaires. ii) Il est possible que le soliton joue un rôle fondamental dans un phénomène plus compliqué. Par exemple, les perturbations ioniques liées à une instabilité modulationnelle peuvent être décrites par l'équation de K-dV qui inclut l'effet d'un champ de haute fréquence. Les perturbations ioniques sont le carré de l'inverse de la fonction sinus-hyperbolique. iii) Il semble important d'étudier une stabilisation des ondes instables et turbulentes en considérant l'équation de K-dV comme équation du couplage des modes. Dans ce cas on aura besoin d'ajouter un terme dissipatif dans l'équation de K-dV.

Les principaux sujets traités dans ce mémoire sont divisés en trois parties : (i) sur le plan théorique, nous avons d'abord établi l'équation du couplage des modes en décomposant l'amplitude de l'équation de K-dV en une onde de fréquence donnée et ses harmoniques et ensuite reconstitué le soliton par la superposition de ces ondes. Ce procédé permet d'expliquer l'expérience de la récurrence. (ii) Sur le plan expérimental, nous avons trouvé une méthode d'excitation du soliton par une grille qui a permis de confirmer que le pic observé satisfait bien aux propriétés du soliton prévues par la théorie. (iii) Nous avons mis en évidence expérimentalement que l'interaction onde-particule modifiait considérablement le phénomène de la récurrence de l'onde ionique.

REFERENCES

(1) D.J.Korteweg et G.de Vries, Phil.Mag., 39, 422 (1895)

(2) N.J.Zabusky et M.D.Kruskal, Phys.Rev.Lett., 15, 240 (1965)

(3) N.Asamo, T.Taniuti et N.Yajima, J.Math.Phys., 10, 2020 (1969)

(4) G.L.Lamb, Jr., Rev.Mod.Phys., 43, 99 (1971)

(5) T.Taniuti et C.C.Wei, J.Phys.Soc.Japan, 24, 941 (1968) : T.Taniuti et N.Yajima, J.Math.Phys., 10, 1369 (1969)

(6) H.Washimi et T.Taniuti, Phys.Rev.Lett., 17, 966 (1966)

(7) Y.H.Ichikawa, T.Imamura et T.Taniuti, J.Phys.Soc.Japan, 33, 189 (1972) : Y.H.Ichikawa et T.Taniuti, J.Phys.Soc.Japan, 34, 513 (1973)

(8) Y.A.Berezin et V.I.Karpman, Sov.Phys.J.E.T.P., 24, 1049 (1967)

(9) C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal et R.M.Miura, Phys.Rev. Lett., 19, 1095 (1967)

(10) M.Wadati et M.Toda, J.Phys.Soc.Japan, 32, 1403 (1972)

(11) V.E.Zahkarov et A.B.Sabat, Soviet Phys.J.E.T.P., 34, 62 (1972)

(12) M.Wadati, J.Phys.Soc.Japan, 34, 1289 (1973)

(13) E.Fermi, J.R.Pasta et S.M.Ulam, "Collected works of Enrico Fermi" vol.II, 978 (1965) Univ.Chicago Press

(14) F.D.Tappert et C.N.Judice, Phys.Rev.Lett., 29, 1308 (1972)

(15) F.D.Tappert, Phys.Fluids, 15, 2446 (1972)

(16) S.Watanabe, J.Plasma Phys., 13, 217 (1975)

(17) H.Ikezi, R.J.Taylor et R.D.Baker, Phys.Rev.Lett., 25, 11 (1970)

(18) N.Hershkowitz, T.Romesser et D.Montgomery, Phys.Rev.Lett., 29, 1586 (1972)

(19) H.Ikezi, Phys.Fluids, 16, 1668 (1973)

(20) S.Watanabe, O.Ishihara et H.Tanaca, Plasma Phys., 17, 345 (1975).

o o
o

CHAPITRE I

GENERALITES

1. RELATION DE DISPERSION DE L'ONDE ACOUSTIQUE IONIQUE

Il existe quatre modes dans un plasma infini, homogène et non-magnétisé. Deux d'entre eux de polarisation transversale (onde électromagnétique) peuvent se propager aux hautes fréquences. Les deux autres, électrostatiques, sont, respectivement, l'onde de plasma électronique de haute fréquence et l'onde acoustique ionique de basse fréquence. La relation de dispersion de ces deux derniers est donnée par[1] :

$$\frac{k^2}{k_D^2} = \frac{1}{2}\{Z'(\zeta) + \theta Z'(\zeta\theta^{1/2}\delta^{-1/2})\}, \qquad (1)$$

où k_D est le nombre d'onde de Debye défini comme l'inverse de la longueur de Debye, $\zeta = \omega/ka_e$ et $\theta = T_e/T_i$. $Z(\zeta)$ et $Z'(\zeta)$ sont la fonction de dispersion de plasma et sa dérivée première par rapport à l'argument[2]. D'autres notations sont habituelles.

Le second membre de l'équation (1) représente l'effet des électrons et des ions sur la dispersion du milieu ionisé. L'équation (1) possède une infinité de solutions, dont le mode de Landau[3] est le plus faiblement amorti.

La dispersion de l'onde de plasma électronique s'obtient, lorsqu'on passe à la limite $m/M \to 0$. Pour ce qui est de l'onde acoustique ionique, la situation est différente : les deux termes jouent le même rôle. Dans le cas où $T_e >> T_i$, on obtient la relation de dispersion du mode acoustique ionique se propageant dans un plasma :

$$\omega^2 = k_r^2 \cdot \frac{T_e}{M}\left(\frac{1}{1+k_r^2/k_D^2} + \frac{3T_i}{T_e}\right), \qquad (2)$$

$$k_i = \omega\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{T_e}\right)^{1/2}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}.\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{T_e}{T_i}.\frac{1}{1+k_r^2/k_D^2}+3\right)\right\} \quad ,(3)$$

où k_r et k_i sont respectivement les parties réelle et imaginaire de k. Les équations (2) et (3) sont valables pour $T_e \gtrsim 10\ T_i$.

Dans le cas où $T_e >> T_i$, la vitesse de phase ω/k devient plus grande que la vitesse thermique ionique a_i, ce qui donne lieu à un faible amortissement Landau. Lorsque k s'approche de k_D, la vitesse de phase décroît du fait que l'effet d'écrantage électronique sur la perturbation de la densité ionique devient peu important. Les ions sont alors soumis à leur propre gradient de pression, de sorte que la vitesse de phase décroît davantage et s'approche de a_i. L'interaction résonnante onde-particule devenant très forte, le mode acoustique ionique est alors fortement amorti.

L'équation (3) ne décrit pas l'amortissement Landu dû aux électrons. Pour un plasma d'argon, cet amortissement Landau causé par les électrons est plus fort que celui par les ions, lorsque $k << k_D$ et pour le rapport de température θ supérieur à 22. L'onde acoustique ionique parvient, cependant, à piéger les électrons dans le puits de son potentiel. L'amortissement Landau dû aux électrons n'a alors plus de signification physique dans un plasma non-collisionnel[4].

La figure 1 montre la relation de dispersion de l'onde ionique pour plusieurs valeurs du rapport de la température. La vitesse de phase décroît dans la région de grands nombres d'onde, lorsque θ croît. C'est-à-dire que la température ionique réduit l'effet de dispersion.

Tanaca et al.[5] ont mis en évidence expérimentalement la relation de dispersion de l'onde ionique dans un plasma instable. L'amortissement de Landau de l'onde ionique propagative a été observé d'une part par Hirshfield et al.[6] et d'autre par par Watanabe et Tanaca[7]. La mesure plus précise de la relation de dispersion de l'onde ionique amortie par effet Landau a été effectuée récemment sur la machine D.P.[8].

Wong et al.[9] ont observé les premiers, semble-t-il, l'amortissement Landau de l'onde ionique dans une machine-Q. Cependant, on admet maintenant que le mode qu'ils ont observé n'était qu'un mode balistique amorti par le mélange de phase de l'écoulement libre des ions[10,11,12].

2. EQUATION DE KORTEWEG-DE VRIES

Korteweg et de Vries ont établi les premiers une équation décrivant l'onde de gravité qui se propage dans un canal peu profond. On l'appelle depuis l'équation de Korteweg-de Vries (abrégé dans la suite comme K-dV). Depuis une dizaine d'années cette équation est souvent utilisée comme équation modèle pour décrire la propagation non-linéaire d'une onde d'amplitude finie dans un milieu dispersif. En 1965 Zabusky et Kruskal[13] ont résolu numériquement l'équation de K-dV, et montré des propriétés marquantes des solitons. Depuis l'intérêt porté sur cette équation n'a cessé d'accroître.

En physique des plasmas, Washimi et Taniuti[14] ont établi l'équation de K-dV à une dimension décrivant une évolution asymptotique de l'onde ionique d'amplitude faible mais finie. Dans un repère de l'onde, celle-ci s'écrit sous la forme :

$$\psi_\tau + \psi\psi + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi\xi} = 0, \qquad (4)$$

où les indices désignent les dérivées partielles. ψ représente soit une densité perturbée n normalisée par rapport à une densité d'équilibre n_o, soit un potentiel ϕ associé à l'onde normalisée par rapport à la température électronique T_e/e. Les deux variables ξ et τ sont, respectivement, la variable spatiale et la variable temporelle normalisées par rapport à la longueur d'onde de Debye λ_D et à l'inverse de la fréquence plasma ionique ω_{pi}^{-1}, respectivement.

L'équation (4) a été obtenue à partir d'un système d'équations : équation de continuité ionique, équation du mouvement pour les ions froids, équation du mouvement électronique sans le

terme d'inertie et équation de Poisson. L'astuce de leur théorie réside dans le développement des grandeurs physiques en petit paramètre ε, paramètre qui permet d'introduire en même temps les variables asymptotiques

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x-t) \quad \text{et} \quad \eta = \varepsilon^{3/2}x.$$

Remarquons que les puissances 1/2 et 3/2 qui figurent sur ε traduisent l'effet dispersif du milieu sur l'onde ionique.

La méthode générale pour établir l'équation différentielle qui décrit l'évolution non-linéaire d'une onde dans un milieu dispersif est appellée méthode de perturbation réductive et a été développée par Taniuti et ses collaborateurs[15].

On peut résoudre en général l'équation de K-dV avec la condition initiale donnée $\psi(\xi,\tau = 0)$. La méthode sera expliquée brièvement dans le chapitre suivant.

Dans un repère du laboratoire l'équation (4) devient :

$$\psi_\tau + \psi_\xi + \psi\psi_\xi + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi\xi} = 0 \qquad (4')$$

Pour trouver une solution satisfaisant à la condition aux limites donnée : $\psi(\xi= 0,\tau)$, il est plus commode d'écrire l'équation de K-dV sous la forme suivante :

$$\psi_\xi - \psi\psi_\tau - \frac{1}{2}\psi_{\tau\tau\tau} = 0, \qquad (5)$$

$$\psi_\xi + \psi_\tau - \psi\psi_\tau - \frac{1}{2}\psi_{\tau\tau\tau} = 0. \qquad (5')$$

L'équation (5) est écrite dans un repère de l'onde et (5') dans un repère du laboratoire.

3. LINEARISATION DE L'EQUATION DE K-dV

Supposons que l'amplitude ψ soit proportionnelle à $\exp\{i(K\xi - \Omega\tau)\}$ (où les K et Ω sont le nombre d'onde et la fréquence de la perturbation normalisée par rapport à k_D et ω_{pi}). En négligeant le terme non-linéaire on obtient la relation de dispersion :

$$\Omega = K - \frac{1}{2}K^3 \qquad (6)$$

ou

$$K = \Omega + \frac{1}{2}\,^3 \qquad (6')$$

Ces relations de dispersion coïncident avec l'équation (2) dans la limite de petits nombres d'onde, lorsque $T_i = 0$. On peut démontrer que les équations (6) et (6') sont équivalentes à l'équation (2) pour $\kappa = k/k_D \lesssim 0{,}6$.

Montrons un autre exemple de l'effet dispersif de l'onde ionique. On suppose que l'excès de densité ionique Δn est donné à $x = 0$ pendant la durée de temps Δt entre $t = 0$, $t = \Delta t$. x et t sont normalisés par rapport à λ_D et ω_{pi}^{-1} et $|\Delta n|/n_o \ll 1$. Bien que cette impulsion soit spatialement (ou temporellement) très localisée, la perturbation a une largeur spectrale appréciable. En conséquence un paquet d'onde est formé au cours de la propagation. La tête du paquet d'onde comporte les ondes de petits nombres d'onde (ou de basses fréquences) et la queue celles de grands nombres d'onde (ou de hautes fréquences). Comme chaque onde se propage avec une vitesse de phase différente, le paquet d'onde s'élargit spatialement.

Ikezi et al.[16] ont discuté quantitativement ce phénomène à partir de l'équation de K-dV (4) sans terme non-linéaire. La solution s'écrit à l'aide de la fonction d'Airy :

$$\Delta n \propto x^{-1/3} A_i\left[\frac{x-t}{x^{1/3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}\right]. \qquad (7)$$

L'amplitude du paquet varie comme $x^{-1/3}$. Pour $x-t < 0$, la fonction d'Airy décroît rapidement : c'est-à-dire que la vitesse de la tête du paquet coïncide avec la vitesse de l'onde acoustique

ionique $(T_e/M)^{1/2}$. Pour x-t < 0, l'amplitude oscille, et la période d'oscillation s'élargit comme $x^{1/3}$. On voit donc que, sans terme non-linéaire, l'équation n'a plus de solution stationnaire. La forme explicite de l'équation (7) est donnée sur la figure 2 pour x = 1 et x = 8. Si l'on tient compte de l'effet dissipatif dû à l'amortissement Landau, l'amplitude du paquet d'onde s'amortit plus rapidement que $x^{-1/3}$. Les ondes de grands nombres d'onde étant fortement amorties par effet Landau, l'amplitude de la queue du paquet d'onde décroît considérablement.

4. PROPRIETES DE SOLITON

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré qu'une solution stationnaire de l'équation de K-dV n'existe que si l'on tient compte du terme non-linéaire. Dans ce paragraphe, nous discutons d'abord l'évolution d'une solution qualitative de l'équation de K-dV dans une autre limite, où l'on néglige le terme dispersif. L'équation devient alors :

$$\psi_\tau + \psi\psi_\xi = 0. \qquad (8)$$

Prenons une distribution de l'amplitude initiale donnée sur la figure 3(a). L'équation (8) montre que ψ se raidit avec le temps dans la région $\psi_\xi < 0$ (voir la figure 3(b)). Mais comme on néglige dans l'équation (8) l'effet dispersif qui se traduit par l'étalement d'un paquet d'ondes, la pente croît et finalement on voit apparaître un déferlement (voir figure 3(c)). Il est évident qu'on doit rejeter une telle solution instable (et physiquement inacceptable !) donnée sur la figure 3(c).

Afin d'obtenir des solutions stables de l'équation (8) mais qui ne sont pas toujours stationnaires, il faut en général ajouter le troisième terme $c\psi_{\underbrace{\xi\xi..\xi\xi}_{m}}$

$$\psi_\tau + \psi\psi_\xi + c\psi_{\underbrace{\xi\xi...\xi}_{m}} = 0 \qquad (8')$$

où le $\underbrace{\xi\xi\ldots\xi}_{m}$ désigne une dérivée partielle d'ordre m de ψ par rapport à ξ et c une constante. On peut considérer les deux cas suivants :

$$m = \begin{cases} 2n \\ 2n + 1 \end{cases}$$

Cas m = 2n

Dans ce cas, le nouveau terme représente l'effet de dissipation. Avec n = 1, l'équation (8') s'identifie avec l'équation de Burgers

$$\psi_\tau + \psi_{\xi\xi} + c\psi_{\xi\xi} = 0. \qquad c < 0$$

Cette équation a une solution particulière qui décrit une onde de choc. A cause de la dissipation, l'équation de Burgers possède une solution stable mais n'a pas de solution stationnaire autre que la solution triviale $\psi = 0$.

Cas m = 2n + 1

Si le troisième terme s'écrit sous la forme d'une dérivée d'ordre impair, l'équation (8') décrit la propagation d'un paquet sans dissipation. Au cas où n = 1, on obtient l'équation de K-dV. Cette équation ne contient pas l'effet dissipatif et possède des solutions stables et stationnaires. Si l'amplitude ψ s'approche d'une valeur asymptotique ψ_∞ assez rapidement quand $\xi \to \pm \infty$, une solution particulière de l'équation de K-dV donnée par (4) s'écrit :

$$\psi = \psi_\infty + (\psi_o - \psi_\infty)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x - ct}{D}\right), \tag{9}$$

où ψ_o et ψ_∞ sont des constantes d'intégration quelconques. La solution (9) représente une "onde solitaire" ou "soliton" dont la vitesse et la largeur sont exprimées en fonction de son amplitude $(\psi_o - \psi_\infty)$:

$$\frac{c}{c_s} = 1 + \frac{1}{3}(\psi_o - \psi_\infty) + \psi_\infty, \tag{10}$$

$$\frac{D}{\lambda_D} = \left(\frac{6}{\psi_o - \psi_\infty}\right)^{1/2} \tag{11}$$

Dans l'expression (10), la vitesse est donnée dans un repère du laboratoire. Il est facile de remarquer que, si l'amplitude de soliton croît, sa vitesse croît et sa largeur diminue. Nous appelons les équations (10) et (11) les "conditions de soliton".

La raison pour laquelle les équations de Burgers et de K-dV possèdent des solutions stables s'explique par le fait que l'énergie de l'onde se concentre dans une région où la pente de l'amplitude est grande. Le troisième terme de l'équation de Burgers représente la dissipation de cette énergie. Une telle solution stable existe lorsqu'il y a un équilibre entre la concentration de l'énergie et sa dissipation.

Par ailleurs, le raidissement du paquet se traduit par la génération des ondes ayant un grand nombre d'onde. Dans le cas de l'onde ionique, leur vitesse de phase est plus petite que celle des ondes ayant un petit nombre d'onde, ce qui fait que l'effet dispersif empêche le raidissement du profil de l'onde. Tout ceci explique la formation d'une solution stable et stationnaire lorsque la non-linéarité et la dispersion se contrebalancent.

5. METHODE DE RESOLUTION DE L'EQUATION DE K-dV

Dans ce paragraphe, nous allons résoudre l'équation de K-dV par deux méthodes différentes. Nous utilisons 1) la méthode des lois de conservation[17] et 2) la méthode de diffusion inverse[18] afin d'obtenir des solutions satisfaisant des conditions initiales sur l'impulsion.

5.1. Méthode des lois de conservation[17]

On peut déduire de l'équation de K-dV un nombre infini d'équations de conservation[19,20]. En effet Berezin et Karpman ont résolu l'équation de K-dV

$$\psi_\tau + \psi\psi_\xi + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi\xi} = 0, \qquad (12)$$

en utilisant ces équations de conservation.

Nous imposerons la condition initiale suivante :

$$\psi(\xi,\tau=0) = \psi_o \phi(\xi/a), \tag{13}$$

ψ_o et $\phi(\xi/a)$ sont, respectivement, l'amplitude et la forme de la perturbation initiale. Avec le changement de variable

$$\eta = \psi/\psi_o, \quad x = \xi/a \quad \text{et} \quad t = \psi_o \tau/a,$$

l'équation de K-dV et la condition initiale deviennent :

$$\eta_t + \eta\eta_x + \frac{1}{\sigma^2}\eta_{xxx} = 0, \tag{14}$$

$$\eta(x,t=0) = \phi(x), \tag{15}$$

où $\sigma = \sqrt{2}\, a\psi_o^{1/2}$.

Les équations de conservation que l'on peut déduire de l'équation de K-dV prennent la forme générale suivante

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial P_m}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

où les fonctions P_m et Q_n forment une série infinie de fonctions dont voici les trois premières[4,5]

$$Q_1 = \eta \qquad P_1 = \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{\sigma^2}\eta_{xx} \tag{17}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\eta^2 \qquad P_2 = \frac{1}{3}\eta^3 + \frac{1}{\sigma^2}\{\eta\eta_{xx} - \frac{1}{2}(\eta_x)^2\}, \tag{18}$$

$$Q_3 = \frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{\sigma^2}(\eta_x)^2, \quad P_3 = \frac{1}{4}\eta^4 + \frac{1}{\sigma^2}(\eta^2\eta_t\eta_x) + \frac{1}{\sigma^2}\eta_{xx}. \tag{19}$$

Si η s'annule pour $x \to \infty$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\int Q_m dx = 0.$$

C'est-à-dire que la quantité, $\int Q_m dx$, est constante et indépendante du temps. Cette quantité peut donc être calculée au temps $t = 0$ à partir de la condition initiale (15). On définit

donc la quantité invariante S_m

$$S_m = \int Q_m(t=0)dx. \tag{20}$$

Supposons maintenant qu'une perturbation initiale donne au bout d'un certain temps N solitons ne se chevauchant pas ; alors la solution de l'équation (14) est écrite par

$$\eta = \sum_{r=1}^{N} S_{(r)}(x,t)$$

et l'invariant S_m peut s'écrire comme une somme d'invariant de $S_{m(r)}$ élémentaires pour chaque soliton :

$$S_m = \sum_{r=1}^{N} S_{m(r)}$$

où $S_{(r)}(x,t)$ est le profil du soliton donné par

$$S_{(r)}(x,t) = \eta_{(r)}\,\mathrm{sech}^2\{\sqrt{\eta_{(r)}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{12}}\,(x - \frac{\eta_{(r)}}{3}t)\}$$

D'autre part, dans ce cas on peut définir des fonctions q_m par les définitions formellement identiques aux équations (17)~(19) où η est remplacé par $S_{(r)}(x,t)$; alors

$$S_m(r) = \int_{-\infty}^{\infty} q_m\big(S_{(r)}(x,t)\big)dx.$$

Après la transformation

$$\sqrt{\eta}\,\frac{\sigma}{\sqrt{12}}\,(x - \frac{\eta}{3}t) = x',$$

on obtient :

$$S_{m(r)} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{12}{\eta_{(r)}}}\int_{-\infty}^{\infty} q_m\big(S_{(r)}(x')\big)dx'.$$

Comme $q_m\big(S(r)(x')\big)$ peut s'exprimer en fonction de la puissance m de l'amplitude η du soliton :

$$S_{m(r)} = \eta_{(r)}^{m-\frac{1}{2}}\,\frac{\sqrt{12}}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} q_m(\mathrm{sech}^2 x')dx'.$$

On obtient, lorsque l'on compare $\sum_{r=1}^{N} S_{m(r)}$ à l'expression (20),

$$\sum_{r=1}^{N} \eta_{(r)}^{m-\frac{1}{2}} = -\frac{\sigma}{\sqrt{12}} \int Q_m(x,0)dx \Big/ \int q_m(\mathrm{sech}^2 x)dx. \qquad (21)$$

Dans le cas particulier où la solution de K-dV est formée par la superposition de deux solitons, il est possible de résoudre l'équation (21). Lorsque m = 1 et 2, (17) et (18) donnent :

$$\eta_1^{1/2} + \eta_2^{1/2} = \frac{\sigma}{2\sqrt{12}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = a_1,$$

$$\eta_1^{3/2} + \eta_2^{3/2} = \frac{3\sigma}{4\sqrt{12}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x)dx = a_2.$$

Résolvant ces deux équations on trouve une forme explicite de l'amplitude des deux solitons $\eta_{1,2}$:

$$\eta_{1,2}^{1/2} = \frac{1}{2}\{a_1 \pm \sqrt{\frac{4}{3}\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1^3}{3}}\} \qquad (22)$$

Les amplitudes $\eta_{1,2}^{1/2}$ étant réelles et non négatives, on a $a_2 \leq a_1^3 \leq 4a_2$.

Quand a_1^3 est plus grand que $4a_2$, il s'avère qu'au moins trois solitons existent. Il faut alors utiliser au moins trois équations de conservation.

La solution (22) permet de résoudre l'équation de K-dV avec la condition initiale particulière :

$$\psi(\xi,\tau=0) = \psi_o \mathrm{sech}^2(\xi/a) \qquad (23)$$

Le résultat obtenu est représenté par la courbe en rond noir sur la figure 4.

5.2. Méthode de la diffusion inverse[18]

En vue d'utiliser cette méthode, il est commode de modifier l'équation de K-dV avec le changement de variables suivant :

$$\psi = -2^{-1/3}.6u \ , \ \tau = t \quad \text{et} \quad \xi = 2^{-1/3}x \tag{24}$$

L'équation (12) prend alors la forme :

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{25}$$

Considérons l'équation de Schrödinger indépendante de temps :

$$\Psi_{xx} + \big(E - u(x,t)\big)\Psi = 0, \tag{26}$$

u(x,t) étant une solution de (25). Ψ et E dépendent du temps paramétriquement. On suppose qu'au bout d'un certain temps, l'équation (26) a N états liés avec pour énergie

$$E_n = -k_n^2 , \qquad n = 1,2,...N.$$

et des états continus avec pour énergie

$$E = k_n^2 \quad (>0).$$

Reportant (26) dans (25), on obtient :

$$E_t\Psi^2 = \big(\Psi_x Q - \Psi Q_x\big)_x, \tag{27}$$

ici $Q = \Psi_t + \Psi_{xxx} - 3(u + E)\Psi_x$

On est alors amené à calculer successivement les valeurs propres discrètes et les valeurs propres continues.

Etude des valeurs propres discrètes : $E_n(t) = -k_n^2(t)$:

Si les fonctions propres normalisées $\psi_n(x,t)$ ainsi que leurs dérivées premières décroissent assez rapidement lorsque $x \to \infty$, nous obtenons :

$$\frac{dE_n}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^2 = 0$$

Par conséquent $E_n(t) = E_n(0)$ et $k_n(t) = k_n(0)$.
C'est dire que les valeurs propres discrètes sont conservées si le potentiel u de l'équation de Schrödinger est donné par la solution de l'équation de K-dV.

Eliminant alors le terme de gauche dans (27), et intégrant (27) deux fois sur x, on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial x^3} - 3(u + E_n)\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}$$
$$= F_n(t)\Psi_n + D_n(t)\Psi_n \int \frac{dx}{\Psi_n^2} \quad , \qquad (28)$$

où $F_n(t)$ et $D_n(t)$ sont des constantes d'intégration.

La condition aux limites pour $x \to \infty$ et la condition de normalisation donnent $F_n(t) = D_n(t) = 0$. Dans la région $x \to \infty$ on peut considérer que u est négligeable, car, s'il ne l'était pas, les fonctions propres $\Psi_n(x,t)$ n'auraient pas les propriétés de décroissance décrites ci-dessus. Alors, en introduisant la définition

$$\Psi_n(x,t) \equiv C_n(t)\exp(-k_n t),$$

l'équation (17) devient :

$$\frac{d}{dt}C_n(t) = 4k_n^3 C_n(t),$$

qui donne une solution :

$$C_n(t) = C_n(0)\exp(4k_n^3 t). \qquad (29)$$

Etude des valeurs propres continues $E(t) = k^2(t) > 0$

La méthode qui permet de trouver la fonction propre est apparentée à la solution du problème de transmission. Supposons qu'une onde plane stationnaire se propage à partir de $x = +\infty$ et rencontre un potentiel $u(x,t)$. Une partie $|R|$ est réfléchie

$$\Psi = \exp(-ikx) + R(k,t)\exp(ikx), \quad x \to +\infty \tag{30}$$

et une autre partie $|T|$ est transmise

$$\Psi = T(k,t)\exp(-ikx). \quad x \to -\infty \tag{31}$$

où $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Les valeurs propres continues peuvent être choisies comme constantes et (28) reste toujours valable

$$\Psi_t + \Psi_{xxx} - 3(u+E)\Psi_x = F(t)\Psi + D(t)\Psi\int\frac{dx}{\Psi^2}. \tag{28'}$$

Pour $x \to -\infty$, nous avons vu que $u \simeq 0$. L'équation (28') s'écrit à l'aide de (31) :

$$\frac{\partial T(k,t)}{\partial t} + 4ik^3T(k,t) = F(t)T(k,t) + \frac{D(t)}{T(k,t)}\int dx\, \exp(2ikx).$$

Pour que l'équation ci-dessus préserve un sens quand $x \to -\infty$, $D(t)$ doit s'annuler. On obtient alors

$$\frac{\partial T(k,t)}{\partial t} + \left(4ik^3 - F(t)\right)T(k,t) = 0. \tag{32}$$

u doit aussi s'annuler pour $x \to \infty$, $u \simeq 0$. Reportant (30) dans (28') on a :

$$\left\{\frac{\partial R(k,t)}{\partial t} - 4ik^3R(k,t) - F(t)R(k,t)\right\}\exp(ikx)$$

$$+ \left(4ik^3 - F(t)\right)\exp(-ikx)$$

$$= D(t)\{\exp(ikx) + R(k,t)\exp(ikx)\}\int dx\{\exp(-ikx + R(kt)\exp(ikx)\}^2.$$

Pour la même raison que dans le cas $x \to -\infty$, il est clair que $D(t)$ doit être nul. Annulant alors les coefficients de $\exp(ikx)$ et $\exp(-ikx)$, on obtient :

$$F(t) - 4ik^3 = 0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial R(k,t)}{\partial t} - 8ik^3 R(k,t) = 0. \tag{34}$$

Les équations (32)-(34) donnent enfin

$$T(k,t) = T(k,0)$$

$$R(k,t) = R(k,0)\exp(i8k^3 t)$$

Comme dans le cas de la diffusion inverse en mécanique quantique, la connaissance de $C_n(t)$, $k_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots N)$ et $R(k,t)$ permet d'exprimer, en principe, $u(x,t)$ pour un temps quelconque. La solution de K-dV, $u(x,t)$, est alors donnée par

$$u(x,t) = -2dK(x,x,t)/dx \tag{35}$$

où $K(x,y,t)$, $(y \geq x)$, est la solution de l'équation de Gelfand-Levitan,

$$K(x,y,t) + B(x+y,t) + \int_x^\infty dy' B(y+y')K(x,y',t) = 0 \tag{36}$$

et où $$B(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, R(k,t)\exp(ikx) + \sum_{n=1}^{N} C_n^2(t)\exp\{-k_n(t)x\}.$$

L'équation de K-dV qui est non-linéaire est transformée en l'équation de Gerfand-Levitan qui est "linéaire". Kay et Morse[21] ont déjà obtenu la solution de (36) dans le cas $R(k,t) = 0$; une solution explicite de N solitons a été donnée par Wadati et Toda[22] :

$$u = -2\sum_{n=1}^{N} k_n^2 \operatorname{sech}^2(k_n x_n + \delta_n), \quad t \to \infty \tag{37}$$

où $x_n = x - 4k_n^2 t,$

et δ_n est déterminé par une condition initiale.

Il est facile de montrer que (37) est formée d'une superposition de solitons, dont les caractéristiques sont obtenues en calculant les valeurs propres de l'équation de Schrödinger pour le potentiel initial.

A titre d'exemple, on montre sur la figure 4 la solution de l'équation (12) pour les conditions initiales suivantes

$$\psi(\xi,\tau=0) = \psi_o \operatorname{sech}^2(\xi/a), \tag{23}$$

et

$$\psi(\xi,\tau=0) = \psi_o\{\theta(\xi+a) - \theta(\xi-a)\}, \tag{38}$$

où $\theta(\xi)$ est la fonction escalier définie par

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

Le résultat obtenu à partir de la condition initiale (23) est montré sur la courbe en tirets et celui correspondant à (38) sur la courbe solide dans la figure 4.

REFERENCES

(1) B.D.Fried et R.W.Gould, Phys.Fluids, 4, 139 (1961)

(2) B.D.Fried et S.D.Conte, "Plasma Dispersion Function", Academic Press (1961)

(3) L.D.Landau, J.Phys. U.S.S.R., 10, 25 (1946)

(4) K.Nishikawa et C.S.Wu, Phys.Rev.Lett., 23, 1020 (1969)

(5) H.Tanaca, M.Koganei et A.Hirose, Phys.Rev.Lett., 16, 1079 (1966) ; H.Tanaca, A.Hirose et M.Koganei, Phys.Rev., 161, 94 (1967)

(6) J.H.Hirschfield, J.H.Jacob et D.E.Baldwin, Phys.Fluids, 14, 628 (1971)

(7) S.Watanabe et H.Tanaca, Plasma Phys., 15, 501 (1973)

(8) R.J.Taylor, K.R.MacKenzie et H.Ikezi, Rev.Sci.Instr., 43, 1675 (1972)

(9) A.Y.Wong, R.W.Motley et N.D'Angelo, Phys.Rev., A133, 436 (1964)

(10) J.L.Hirschfield et J.H.Jacob, Phys.Fluids, 11, 411 (1968)

(11) K.Estabrook et I.Alexeff, Phys.Rev.Lett., 29, 573 (1972) : Phys.Fluids, 15, 2026 (1972)

(12) S.Watanabe, M.Oishi et H.Tanaca, Phys.Fluids, 17, 240 (1974)

(13) N.J.Zabusky et M.D.Kruskal, Phys.Rev.Lett., 15, 240 (1965)

(14) H.Washimi et T.Taniuti, Phys.Rev.Lett., 17, 966 (1966)

(15) T.Taniuti et C.C.Wei, J.Phys.Soc.Japan, 24, 941 (1968) : T.Taniuti et N.Yajima, J.Math.Phys., 10, 1369 (1969) ; N.Asano, T.Taniuti et N.Yajima, J.Math.Phys., 10, 2020 (1969)

(16) H.Ikezi et al., Plasma Phys., 15, 1141 (1973)

(17) Y.A.Berezin et V.I.Karpman, Soviet Phys.- J.E.T.P., 14, 1049 (1967)

(18) C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal et R.M.Miura, Phys. Rev.Lett., 19, 1095 (1967)

(19) G.B.Whithdam, Proc.Roy.Soc., A283, 238 (1965)

(20) R.M.Miura, C.S.Gardner et M.D.Kruskal, J.Math.Phys., 9, 1204 (1968)

(21) I.Kay et H.E.Mosee, J.Appl.Phys., 27, 1503 (1956)

(22) M.Wadati et M.Toda, J.Phys.Soc.Japan, 32, 1403 (1972).

° ° °

CHAPITRE 2

FORMATION ET RECURRENCE DU SOLITON ACOUSTIQUE IONIQUE

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons exposer la méthode de résolution de l'équation de K-dV par couplage des modes permettant d'expliquer la récurrence éventuelle d'un état initial[1]. L'étude en est motivée par l'expérience d'Ikezi[2], dont les résultats sont les suivants : (i) Quand N solitons sont formés sur une longueur d'onde du mode fondamental, les harmoniques, du 1er au N^{ème}, sont les modes principaux et les amplitudes de l'ordre plus élevé que N+1ème sont petites. C'est-à-dire que le phénomène pourrait être expliqué par N modes. (ii) On observe des oscillations d'amplitude périodique dans l'espace pour chaque harmonique. Les périodes de ces oscillations sont d'autant plus petites lorsque leur nombre d'onde est petit. (iii) Les harmoniques se propagent plus vite que des ondes de même fréquence qui seraient excitées par les signaux extérieurs. Mais la vitesse de phase des harmoniques est toujours plus petite que celle du mode fondamental. (iv) La distance nécessaire pour la récurrence d'une forme initiale croît considérablement quand la fréquence diminue. (v) Il apparaît une discontinuité de phase des harmoniques au point de récurrence.

2. EQUATION DU COUPLAGE DE MODES ET SA SOLUTION

2.1. Equation du couplage de modes

Nous résolvons l'équation de K-dV donnée sous la forme :

$$\psi_\xi + \psi_\tau - \psi\psi_\tau - \frac{1}{2}\psi_{\tau\tau\tau} = 0 \qquad (1)$$

Considérons le cas où une onde de fréquence Ω est excitée à $\xi = 0$ et produit des harmoniques au cours de sa propagation vers $\xi \to \infty$. L'amplitude de fréquence Ω étant supposée très petite, celle de ψ régie par (1) peut être développée en un mode fondamental de fréquence Ω et son deuxième harmonique de fréquence 2Ω.

$$\psi = \frac{1}{2}A(\xi)\exp\{i(K_1\xi - \Omega\tau)\} + \frac{1}{2}B(\xi)\exp\{i(K_2\xi - 2\Omega\tau)\} + c.c. \tag{2}$$

où $A(\xi)$ et $B(\xi)$ sont les amplitudes complexes du fondamental et du deuxième harmonique qui varient lentement dans l'espace. Les (K_1,Ω) et $(K_2,2\Omega)$ sont les nombres d'ondes et les fréquences des deux modes et satisfont à la relation de dispersion linéaire suivante :

$$K_1 = \Omega + \frac{1}{2}\Omega^3 \ , \tag{3}$$

$$K_2 = (2\Omega) + \frac{1}{2}(2\Omega)^3 \ , \tag{4}$$

Les K_1 et K_2 sont les nombres d'onde normalisés par rapport à la longueur d'onde de Debye λ_D et les fréquences Ω et 2Ω normalisées par rapport à la fréquence de plasma ionique. La vitesse de phase de chaque mode, qui représentent le premier et le deuxième terme de l'équation (2), ne coïncide plus avec celle du cas linéaire. La raison en est que la partie imaginaire des amplitudes modifie le nombre d'onde de chaque harmonique et, par conséquent, leur vitesse de phase s'écarte de celle connue dans la théorie linéaire.

En substituant (2) dans (1), on obtient les équations du couplage entre le fondamental et son deuxième harmonique

$$\frac{dA}{d\xi} = \frac{1}{2}i\Omega AB^*\exp(-i\Delta K\xi) \ , \tag{5}$$

$$\frac{dB}{d\xi} = -\frac{1}{2}i\Omega A^2\exp(-i\Delta K\xi) \ , \tag{6}$$

$$\Delta K = K_2 - 2K_1 = 3\Omega^3 \ ,$$

où ΔK représente un désaccord de phase dû à la dispersion de

l'onde ionique. Afin de séparer explicitement les parties réelle et imaginaire de l'équation (2) on pose $A = \rho_1 \exp(i\theta_1)$ et $B = \rho_2 \exp(i\theta_2)$. On obtient alors :

$$\frac{d\rho_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}\Omega\rho_1\rho_2 \sin\theta, \tag{7}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\xi} = \frac{1}{2}\Omega\rho_1^2 \sin\theta, \tag{8}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\Delta K + \cot\theta \frac{d}{d\xi}(\ln \rho_1^2\rho_2), \tag{9}$$

$$\theta = 2\theta_1 - \theta_2 - \Delta K\xi. \tag{10}$$

Par le changem nt de variables

$$u = \frac{\rho_1}{2W^{1/2}}, \quad v = \frac{\rho_2}{2W^{1/2}}, \quad \zeta = \Omega W^{1/2}\xi \quad \text{et} \quad W = (\frac{\rho_1}{2})^2 + (\frac{\rho_2}{2})^2,$$

les équations (7)∿(10) se transforment sous la forme :

$$\frac{du}{d\zeta} = -uv \sin\theta , \tag{11}$$

$$\frac{dv}{d\zeta} = u^2 \sin\theta , \tag{12}$$

$$\frac{dv}{d\zeta} = -\Delta S + \cot\theta \frac{d}{d}(\ln u^2 v), \tag{13}$$

$$\Delta S = \frac{\Delta K}{\Omega W^{1/2}} . \tag{14}$$

Des équations (7) et (8), on peut démontrer que l'énergie de l'onde W est indépendante de ξ. Les u et v satisfont à l'équation de conservation

$$u^2 + v^2 = 1 \tag{15}$$

Le ΔS, défini par (14), est un paramètre important qui représente le rapport de l'effet dispersif ΔK sur l'effet non-linéaire $\Omega W^{1/2}$. Les équations (11)∿(15) constituent un système d'équations du couplage de modes déjà connu en optique non-linéaire[3].

La résolution des équations du couplage de modes est donnée séparément dans le cas $\Delta S = 0$ et $\Delta S \neq 0$.

2.2. Cas $\Delta S = 0$

Quand la fréquence de l'onde est nettement inférieure à la fréquence de plasma ionique, la vitesse de phase du fondamental est égale à celle du deuxième harmonique. On peut alors écrire $\Delta K = \Delta S = 0$. Le cas $\Delta S = 0$ n'est pas réaliste en général. Cependant il y aura une situation particulière où nous pouvons supposer $\Delta S = 0$.

Intégrant l'équation (13) on obtient

$$u^2 v \cos\theta = \Gamma$$

$$= \frac{\rho_1^2(0)\rho_2(0)}{W^{3/2}} \cos\{2\theta_1(0) - \theta_2(0)\}, \qquad (16)$$

où le Γ est une constante d'intégration qui est déterminée par une condition initiale. A partir des équations (11),(12) et (16), nous obtenons

$$\frac{dv^2}{d\zeta} = \pm 2\left[v^2(1 - v^2)^2 - \Gamma^2\right]^{1/2}, \qquad (17)$$

où le signe $\pm$ devant le crochet correspond à celui de $\sin\theta(0)$. Désignons par v_a^2, v_b^2 et v_c^2 ($v_a^2 \leq v_b^2 \leq v_c^2$) les trois racines de $v^2(1-v^2)^2 - \Gamma^2 = 0$ et introduisons

$$y^2 = \frac{v^2 - v_a^2}{v_b^2 - v_a^2}, \qquad \gamma^2 = \frac{v_b^2 - v_a^2}{v_c^2 - v_a^2}.$$

L'intégration de l'équation (17) donne la solution

$$v^2 = v_a^2 + (v_b^2 - v_a^2)\,sn^2\{(v_c^2 - v_a^2)^{1/2}(\zeta+\zeta_o), \gamma\} \qquad (18)$$

$$u^2 = 1 - v^2,$$

où le sn est la fonction de Jacobi et ζ_o est déterminé par une condition initiale. L'équation (18) signifie que l'amplitude du deuxième harmonique croît quand celle du fondamental diminue et vice versa. Cette oscillation des amplitudes étant périodique

dans l'espace, on peut définir une longueur de récurrence ℓ_ζ (ou la longueur d'interaction) comme une période de l'oscillation. En d'autres termes, l'onde reprend, à $\zeta = \ell_\zeta$, sa forme initiale à $\zeta = 0$.
La longueur de récurrence ℓ_ζ est donnée par l'intégrale elliptique

$$\ell_\zeta = \frac{2}{(v_c^2 - v_a^2)^{1/2}} \int_0^1 \frac{dy}{\{(1-y^2)(1-\gamma^2 y^2)\}^{1/2}} . \qquad (19)$$

Elle est d'ordinaire très longue. Si l'on choisit une perturbation initiale de l'ordre de 5 % (i.e. $n(0)/n_o = 0{,}05$), on obtient $\ell/\lambda \gtrsim 20$, où ℓ est une longueur de récurrence et λ, la longueur d'onde du fondamental. Cette longueur ℓ/λ devient plus grande que 30 quand l'amplitude du deuxième harmonique est initialement inférieure à celle du fondamental (i.e. $n_2(0)/n_1(0) \lesssim 0{,}1$). Dans le cas particulier où $\rho_2(0)(=n_2(0))=0$, ce qui correspond à $\Gamma = 0$ et $\gamma = 1$, l'équation (18) s'écrit sous la forme simple,

$$v = \tanh(\zeta), \quad u = \operatorname{sech}(\zeta). \qquad (20)$$

Il est alors évident que la récurrence ne se produit pas (i.e. $\ell_\zeta \to \infty$), du fait que toute l'énergie du fondamental est transférée au deuxième harmonique.

2.3. Cas $\Delta S \neq 0$

Quand la fréquence de l'onde ionique est assez élevée, la vitesse de phase du deuxième harmonique décroît. Alors on ne peut plus négliger l'effet dispersif. Dans ce cas, $\Delta K \neq 0$ et par conséquent $\Delta S \neq 0$. L'intégration directe de (13) donne une solution

$$u^2 v \cos\theta - \tfrac{1}{2}\Delta S v^2 = \Gamma_{\Delta S} \qquad (21)$$

où $\Gamma_{\Delta S}$ est exprimé en fonction de Γ défini précédemment par (16) :

$$\Gamma_{\Delta S} = \Gamma - \tfrac{1}{2}\Delta S v^2(0).$$

Maintenant l'équation (17) peut être généralisée sous la forme

$$\frac{dv^2}{d\zeta} = \pm 2\left[v^2(1-v^2)^2 - \{\Gamma + \tfrac{1}{2}\Delta S\left(v^2-v^2(0)\right)\}^2\right]^{1/2}.$$

La solution de cette équation a la même forme que (18) et (19) avec $v_{a,b,c}$ qui désignent cette fois-ci trois racines de la nouvelle équation :

$$v^2(1-v^2)^2 - \{\Gamma + \tfrac{1}{2}\Delta S\left(v^2-v^2(0)\right)\}^2 = 0 \qquad (22)$$

Dans le cas le plus simple où $\rho_2(0) = 0$ ($\Gamma_{\Delta S} = 0$, $v(0) = 0$), les trois racines de (22) sont données par :

$$v_a^2 = 0, \quad v_b^2 = v_c^{-2} = \left[\tfrac{1}{4}\Delta S + \{1 + (\tfrac{\Delta S}{4})^2\}^{-1/2}\right]^2,$$

et la longueur de récurrence s'écrit :

$$\ell_\zeta = \frac{2}{v_c}\int_0^1 \frac{dt}{\{1 - (v_b/v_c)^2\sin^2 t\}^{1/2}} \qquad (23)$$

La récurrence a lieu même dans le cas où l'amplitude du deuxième harmonique est initialement nulle, contrairement au cas $\Delta S = 0$. On en discutera dans le paragraphe 3. Dans le cas où $\Delta S >> 1$, c'est-à-dire, lorsque l'effet dispersif est nettement supérieur à l'effet non-linéaire, les expressions de v_b et v_c sont simplifiées. On a alors

$$v_b^2 = v_c^{-2} \approx (2/\Delta S)^2 ,$$

et γ s'approche de $(2/\Delta S)^4$ qui est bien supérieur à l'unité. Dans cette limite ($\Delta S \approx 0$, et $\gamma \approx 0$), l'intégrale elliptique et la fonction elliptique peuvent être remplacées par $\pi/2$ et $\sin(\Delta S.\zeta/2)$, respectivement. La longueur de récurrence et les amplitudes des deux ondes sont données alors par

$$\ell_\zeta = \frac{2\pi}{\Delta S} , \qquad (24)$$

et

$$v^2 = (\frac{2}{\Delta S})^2 \sin^2(\frac{\Delta S\zeta}{2}),$$

$$u^2 = 1 - O(\frac{1}{\Delta S^2}) \approx 1. \qquad (25)$$

Nous pouvons exprimer la longueur de récurrence sous une forme habituelle :

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{kC_s}{\omega} \approx \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 . \qquad (26)$$

La longueur de récurrence est indépendante de l'amplitude et ne dépend que de la fréquence. C'est la conséquence de l'hypothèse $\Delta S >> 1$. L'équation (26) est valable jusqu'à la fréquence $\omega/\omega_{pi} \lesssim 0{,}3$, puisque la relation de dispersion (3) n'est plus correcte pour les fréquences $\omega/\omega_{pi} \gtrsim 0{,}6$.

La longueur exacte de récurrence est calculée à partir de (23) en fonction de ΔS (Fig.5). Comme elle a été montrée précédemment (voir l'équation (24)), la longueur de récurrence ℓ_ζ est inversement proportionnelle à ΔS dans la région où $\Delta S >> 1$. Quand ΔS décroît, la longueur de récurrence croît moins vite que $1/\Delta S$. Cette propriété est due à l'accroissement de la non-linéarité et (/ou) à la diminution de l'effet dispersif. De ce fait, les résultats donnés par (24) et (25) jusfifient à postériori que dans (5), l'amplitude du fondamental ne dépend pas de la position, si $\Delta S \geq 1$. Cela correspond au cas où l'amplitude du deuxième harmonique n'est pas assez grand pour réagir sur l'amplitude du fondamental. La longueur de récurrence est approximativement exprimée par (24) et (25) pour $\Delta S > 6$ (voir la figure 5).

La variation spatiale des amplitudes des deux ondes couplées est montrée dans la figure 6. L'amplitude du fondamental $n_1(x)/n_1(0)$ oscille entre 1 et $n_{1\ min.}/n_1(0)$ et celle du deuxième harmonique entre 0 et $n_{2\ max.}/n_1(0)$. Dans le cas $\Delta S >> 1$, l'amplitude du fondamental ne varie pas sensiblement avec la position, tandis que celle du deuxième harmonique reste petite et est inversement proportionnelle à ΔS. La figure 6 nous montre que l'équation (25) est valable dans une région où $\Delta S \gtrsim 6$, fait qui est compatible avec la discussion précédente sur la longueur de récurrence. Pour $\Delta S < 6$, l'amplitude du fondamental varie considérablement. D'autre part, l'amplitude du deuxième harmonique devient comparable à l'amplitude de l'onde fondamentale. Il est à noter que les résultats des figures 5 à 6 peuvent

être incorrects dans la région où $\Delta S \lesssim 1$. En pareil cas, où la non-linéarité prédomine, il est raisonnable de considérer que des harmoniques d'ordre plus élevé pourraient être excitées.

2.4. Effet d'amortissement d'onde

Jusqu'ici, nous avons négligé l'amortissement des ondes. Dans ce paragraphe, nous ne cherchons pas à résoudre exactement les équations du couplage de modes, mais nous contentons de faire quelques remarques suivantes :

(i) Comme il a été montré précédemment, le cas $\Delta S = 0$ n'est pas réaliste. C'est que l'effet non-linéaire est beaucoup plus fort que l'effet dispersif et qu'un grand nombre d'harmoniques existent simultanément à chaque instant. Dans le cas $\Delta S = 0$, une décomposition telle que l'équation (2) n'est plus valable. Afin d'empêcher la génération d'un grand nombre d'harmoniques, il faut que le fondamental s'amortisse avant de transférer son énergie aux harmoniques d'ordre plus élevé. Si c'est le cas, il est raisonnable de penser que les deux premiers modes peuvent être dominants. La longueur de récurrence étant très grande, il est probable que ces ondes seraient amorties sur une longueur bien inférieure à la longueur de récurrence et de ce fait, on ne pourrait pas mettre le phénomène en évidence expérimentalement.

(ii) Quand la longueur d'amortissement est beaucoup plus courte que celle de l'interaction (la récurrence) et que la fréquence des ondes est suffisamment basse ($\Delta S = 0$), nous pouvons utiliser simplement les équations suivantes au lieu de (5) et (6) afin d'expliquer la génération des harmoniques

$$\frac{dA}{d\xi} = -\frac{A}{D_1} \quad , \qquad \frac{dB}{d\xi} = \frac{i}{2}\Omega A^2 - \frac{B}{D_2} \tag{27}$$

D_1 et D_2 sont les longueurs d'amortissement normalisées par rapport à la longueur de Debye. Ohnuma et Hatta[4], et Mix et al.[5] ont déjà obtenu une équation analogue à (27). Cette équation est valable dans le cas où la longueur de l'interaction

est beaucoup plus longue que la longueur d'amortissement. Donc l'amplitude du deuxième harmonique reste petite et n'agit pas sur l'amplitude du fondamental. En supposant $B = 0$ à $\xi = 0$ et $K_1 D_1 = K_2 D_2$ (comme le cas de l'amortissement de Landau), on obtient la solution de (27)

$$A = A_o \exp(-\frac{\xi}{D_1})$$
$$B = \frac{i}{2}\Omega A_o^2 \xi \exp(-\frac{\xi}{D_2}). \qquad (28)$$

L'amortissement de l'onde fondamentale est exponentiel et indépendant de l'amplitude du deuxième harmonique. Quant à l'amplitude du deuxième harmonique, elle croît linéairement près de $\xi = 0$, prend son maximum à $\xi = D_2$ (or $x = \delta_2$, δ_2 étant la longueur de l'amortissement du deuxième harmonique) et ensuite décroît. A $\xi >> D_2$, l'amortissement de l'amplitude du deuxième harmonique est quasi-exponentiel. Cela correspond au cas où $\Delta S = 0$ et $\Gamma = 0$ et où l'amortissement est particulièrement important. En effet, la solution de (20) pour $\Delta S = 0$ et $\Gamma = 0$ montre que l'amplitude normalisée v est proportionnelle à ζ pour $\zeta << 1$. Nous pouvons la réécrire sous la forme $B \propto \frac{1}{2}\Omega A_o^2 \xi$. Cette expression coïncide exactement avec (28) si $\xi << D_2$.

3. RECURRENCE D'UN ETAT INITIAL

Dans ce paragraphe et le suivant, on présente une analyse numérique de l'équation (2) basée sur la solution donnée par l'équation (18) dans le cas où $\Delta S \neq 0$ et $\Gamma_S = 0$ ($\rho_2(0)=0$). Nous montrons d'abord l'existence d'une récurrence pour un état initial. Pour effectuer le calcul numérique, il est nécessaire de connaître θ_1 et θ_2, phases de l'amplitude complexe du fondamental et de son deuxième harmonique, en fonction de la distance. Elles s'écrivent :

$$\frac{d\theta_1}{d\zeta} = u \cos\theta, \quad \frac{d\theta_2}{d\zeta} = \frac{u^2}{v} \cos\theta. \qquad (29)$$

Ces équations n'apparaissaient pas explicitement dans l'équation (13). A l'aide de l'équation (21), nous obtenons la phase du deuxième harmonique sous la forme

$$\theta_2 = -\frac{1}{2}\Delta S\zeta + \alpha = -\frac{1}{2}\Delta K\xi + \alpha \qquad (30)$$

où α est une constante d'intégration. Pour obtenir θ_1, nous ne résolvons pas l'équation (29) mais les équations (21) et (10). On obtient

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\Delta S\zeta + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\Delta K\xi + \frac{1}{2}\alpha, \qquad (31)$$

où

$$\theta = \arccos\{\frac{v}{2u^2}.\Delta S\}. \qquad (32)$$

θ_1 décroît avec la distance. Cela est évident, si nous écrivons l'équation (13) sous la forme suivante

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{1}{2}\Delta S - \frac{v^2}{u^2}\Delta S \leq -\frac{1}{2}\Delta S.$$

La phase θ décroît donc plus vite que $\frac{1}{2}\Delta S\zeta$, dépendant de l'amplitude v^2/u^2. Donc, à partir de (31), la phase θ_1, elle aussi, décroît avec la distance.

En utilisant (18) et (30)∿(32), on peut reconstituer la forme de l'onde à un point quelconque. Les figures 7 et 8 montrent deux exemples typiques. Quand l'effet dispersif est plus important que l'effet non-linéaire, l'onde ne se déforme pas beaucoup (voir la figure 7(a)). L'onde se rétrécit à $x/\lambda \simeq 3\sim5$, et ensuite reprend sa forme initiale à $x/\lambda \simeq 8$. L'amplitude du mode fondamental ne varie pratiquement pas avec la distance et sa longueur d'onde coïncide avec celle de la théorie linéaire (figure 7(b)). En revanche, l'amplitude du deuxième harmonique croît initialement, sature à $x/\lambda \simeq 4$ et puis décroît (figure 7(c)). Elle devient nulle à $x/\lambda = 8{,}2$ (au point de récurrence) et croît de nouveau. Une discontinuité de phase a lieu à ce point $x/\lambda = 8{,}2$.

Quand la non-linéarité est forte, on observe un phénomène différent. C'est-à-dire qu'un petit pic apparait derrière

un grand pic pour $\Delta S \lesssim 5$. Un exemple de $\Delta S = 3$ est montré sur la figure 8. L'onde se rétréssit pendant les deux premières périodes, ensuite un petit pic émerge à l'arrière d'un grand pic. Le petit pic se propageant plus lentement que le grand pic, il est absorbé par ce dernier qui le suit. La récurrence se produit quand le grand pic absorbe entièrement le petit ($x/\lambda = 6,5$). L'amplitude du mode fondamental varie sensiblement dans ce cas (Figure 8(b)). Elle décroît initialement, prend son minimum à $x/\lambda = 3,25$ et puis croît. Le comportement du deuxième harmonique est presque analogue au cas de $\Delta S = 10$, à part le fait que son amplitude croît jusqu'à la moitié de l'amplitude initiale du mode fondamental et qu'elle devient nulle à $x/\lambda = 6,5$.

On peut faire deux remarques pour $\Delta S < 5$.
(i) La vitesse de phase du mode fondamental est plus grande que celle donnée par la relation de dispersion linéaire (3).
(ii) La longueur de récurrence diminue. Cette décroissance est presque inversement proportionnelle à la racine carrée de l'amplitude initiale.

Considérons maintenant le mécanisme physique de la récurrence. Pour cela il suffit de calculer l'amplitude du deuxième harmonique. A partir des équations (25) et (28), on obtient

$$\psi_2 = \{2\rho_1(0)/\Delta S\}\sin(\tfrac{1}{2}\Delta K\xi)\cos(-\tfrac{1}{2}\Delta K\xi + K_2\xi - 2\Omega\tau + \alpha), \quad \Delta S >> 1. \tag{33}$$

On voit que le deuxième harmonique est composé de deux ondes : $\sin(K_2\xi - 2\Omega\tau)$ et $\sin(2K_1\xi - 2\Omega\tau)$,[12]. La première satisfait à la relation de dispersion linéaire (4), alors que la deuxième est une oscillation forcée sous l'action du mode fondamental et ne satisfait pas à la relation de dispersion. Les deux ondes s'annulent simultanément à $\xi = 2n\pi/\Delta K$ (ou $\zeta = 2n\pi/\Delta S$), c'est-à-dire au point de la récurrence. La discontinuité de phase du deuxième harmonique à ce point de récurrence provient du fait que le signe de l'enveloppe $\sin(\frac{1}{2}\Delta K\xi)$ change à chaque point de récurrence. Par conséquent, cette discontinuité est toujours π.

Quand la non-linéarité est grande (par exemple, $\Delta S \lesssim 6$), l'enveloppe du deuxième harmonique varie plus vite que le cas mentionné ci-dessus. Le phénomène de la récurrence peut être considéré comme un battement des ondes, du fait que l'enveloppe du deuxième harmonique décrite par la fonction elliptique est exprimée par la somme des ondes sinusoïdales. La discontinuité de phase du deuxième harmonique est, elle aussi, due au changement du signe de la fonction elliptique.

Le nombre d'onde $K_2 - \frac{1}{2}\Delta K$ du deuxième harmonique a été calculé à partir de l'argument de la fonction cosinus dans l'équation (33). Le terme de correction $-\Delta K/2$ est due à la phase θ_2 de l'amplitude complexe. Comme θ_2 est indépendante de l'amplitude du fondamental (30), le nombre d'onde est déterminé seulement par la fréquence. Par ailleurs, il est intéressant de comparer la vitesse de phase du deuxième harmonique avec les vitesses de phase linéaires du fondamental et du deuxième harmonique qui sont données par les équations (3) et (4) que voici

$$\frac{V_{1\ell}}{V_2} = \frac{4K_1 + 3\Omega^3}{4K_1} > 1, \qquad \frac{V_2}{V_{2\ell}} = \frac{2K_2}{2K_2 - 3\Omega^3} > 1,$$

où $V_{1\ell}$ et $V_{2\ell}$ sont les vitesses de phase des ondes linéaires de fréquence Ω et 2Ω et V_2 celle du deuxième harmonique produit par le fondamental sous l'effet non-linéaire (couplage des modes). Celle-ci est toujours supérieure à la vitesse de phase de l'onde linéaire de même fréquence, mais inférieure à celle du mode fondamental de fréquence Ω.

La vitesse de phase du mode fondamental dépend de l'amplitude. Pour le vérifier, examinons l'équation (31). Quand l'effet non-linéaire est nettement plus faible que l'effet dispersif ($\Delta S >> 1$), la phase θ est proportionnelle soit à $-\frac{1}{2}\Delta K\xi$ soit à $-\frac{1}{2}\Delta S\zeta$. Dans ce cas,les premier et deuxième termes de l'équation (31) s'annulent et la vitesse de phase du mode fondamental coïncide avec celle de la théorie linéaire. Mais, si l'amplitude (la non-linéarité) croît, la phase θ décroît plus vite que $-\frac{1}{2}\Delta K\xi$ et la vitesse de phase du mode fondamental croît. Cet accroissement est d'ordinaire très petit.

Il est intéressant de comparer maintenant le changement de phase des deux modes sur une longueur égale à la longueur de récurrence. On désigne par $\Delta(\Omega)$ le changement de phase du fondamental et par $\Delta(2\Omega)$ celui du deuxième harmonique. Dans le cas où $\Delta S >> 1$, on obtient alors

$$\Delta(\Omega) = K_1 \ell_\xi \quad \text{et} \quad \Delta(2\Omega) = (K_2 - \tfrac{1}{2}\Delta K)\ell_\xi ,$$

où $\ell_\xi = 2\pi/\Delta K$. D'où

$$\Delta(2\Omega) - 2\Delta(\Omega) = \pi \qquad (34)$$

Cette relation veut dire que la phase du deuxième harmonique croît de 2m+0,5 périodes, si celle du fondamental croît de m périodes dans l'intervalle des deux récurrences (m n'est pas toujours un nombre entier). Supposons qu'on superpose linéairement deux ondes de fréquence Ω et 2Ω, dont les amplitudes sont constantes. On peut alors reconstituer l'onde de même forme, si la phase du deuxième harmonique est déplacée de 2π. Ce n'est pas le cas pour la récurrence, puisque l'amplitude du deuxième harmonique varie avec la distance et devient nulle au point de la récurrence. L'avance de phase de π sur une longueur de récurrence et la discontinuité de phase de π au point de récurrence s'ajoutent pour donner lieu à une onde identique. En effet on l'observe à $\xi = \ell_o$ et à $\xi = \ell_o + m\ell_\xi$, où ℓ_o est une position quelconque et m un nombre entier. Pour $\Delta S \lesssim 6$, le K_1 devient plus petit que celui pour $\Delta S \geq 6$. Ceci est dû à la partie imaginaire de l'amplitude complexe. Par conséquent l'équation (34) peut être satisfaite par ξ_ℓ qui est plus petit que $2\pi/\Delta K$.

4. SOLITONS

Dans ce paragraphe nous allons montrer que chaque pic, composé de deux ondes, satisfait à la condition de soliton.

La table 1 montre les propriétés du soliton pour les neuf pics (voir figure 8). On obtient pour chaque pic l'amplitude

$\psi_o - \psi_\infty$, en calculant $d^2\psi/d\xi^2$ dans la relation(6) :

$$\psi_o - \psi_\infty = \left(3\{\psi_{\xi\xi}|_{pic}\}\right)^{1/2}.$$

Le ψ_∞ est calculé en utilisant cette relation et l'amplitude de chaque pic ψ_o. Alors nous pouvons calculer la largeur et la vitesse de chaque pic à partir de la condition de soliton (I-10 et 11). La connaissance de ψ_o et ψ_∞ permet de mesurer la largeur et la vitesse de chaque pic sur la figure 8 et de les comparer avec les valeurs calculées. Les largeurs des petits pics (N° 7∿9) ne peuvent pas être estimées, ψ_∞ possédant une très grande valeur négative. Les valeurs calculées et mesurées sont en bon accord En d'autres termes, chaque pic formé par la superposition des deux ondes, fondamental plus deuxième harmonique, est un soliton.

La figure 9 montre l'interaction des deux solitons. L'abscisse représente la distance normalisée par rapport à la longueur d'onde du fondamental dans un repère de l'onde. L'ordonnée représente le temps normalisé par rapport à la période du fondamental.
A proximité du point de récurrence, les deux solitons s'attirent et leurs phases (donc leurs vitesses) varient sensiblement. Au cours de l'interaction, la phase du soliton de grande amplitude croît, tandis que celle de petite amplitude décroît. Le soliton de petite amplitude disparaît près du point de récurrence. C'est-à-dire que le soliton de petite amplitude est absorbé par celui de grande amplitude au point de récurrence.

Nous venons de montrer que la formation et l'interaction du soliton acoustique ionique peuvent être bien expliquées par le couplage de modes entre l'onde ionique et son deuxième harmonique. Notons que notre méthode reste en pratique valable même dans le cas de la non-linéarité faible. Elle n'est plus applicable au cas de la non-linéarité forte où plus de trois solitons sont excités sur une longueur d'onde du mode fondamental. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter des harmoniques d'ordre plus élevé dans l'équation (2). Afin d'examiner la validité de notre approche, nous examinons les propriétés du soliton en

fonction de ΔS (Table 2). Pour chaque ΔS, nous avons calculé et mesuré la vitesse et la largeur du pic de plus grande amplitude dans un intervalle des deux récurrences consécutives. Les propriétés du soliton sont bien vérifiées pour $\Delta S \geq 1,5$. Pour la non-linéarité plus forte, c'est-à-dire pour $\Delta S = 1$ et 0,8, les quantités calculées et observées ne sont plus en bon accord les unes avec les autres. Il est donc raisonnable d'affirmer que l'expression (2) est valable dans la région $\Delta S \geq 1,5$.

Il est intéressant de comparer nos résultats avec ceux obtenus par la méthode inverse. Cette dernière prévoit qu'un soliton est engendré sur une longueur d'onde du mode fondamental pour $\Delta S > 4,8$, deux solitons pour $1,2 \leq \Delta S \leq 4,8$ et ainsi de suite[2,7]. D'après notre méthode, un soliton est formé pour $\Delta S \geq 5$, deux pour $\Delta S \leq 5$. Pour $\Delta S \leq 1,5$, notre méthode devient incorrecte. Les deux méthodes sont alors presque équivalentes. Ce fait nous permet de conclure que notre méthode ne peut décrire correctement des solitons que dans le cas de la non-linéarité faible où deux solitons sont engendrés sur une longueur d'onde du mode fondamental.

5. Résumé des résultats

Nous examinons brièvement les rôles respectifs joués par l'effet non-linéaire et l'effet dispersif. La génération des harmoniques reflète l'effet non-linéaire, mais l'effet dispersif empêche le transfert de l'énergie du fondamental aux harmoniques. Ceci est évident, du fait que tous les phénomènes dépendent d'un seul paramètre ΔS. Certes la vitesse de phase de chaque mode est déterminée par la dispersion, mais l'effet non-linéaire la modifie. En réalité, les deux effets sont en compétition dès qu'un soliton est produit par une impulsion extérieure.

Nos résultats sont les suivants. En ce qui concerne la récurrence de l'onde ionique, nous avons trouvé :
(i) la longueur de récurrence décroît proportionnellement au carré de la fréquence et reste indépendante de l'amplitude

initiale dans le cas de la non-linéarité faible. Quand la non-linéarité augmente la longueur de récurrence se raccourcit et devient inversement proportionnelle à la racine carrée de l'amplitude initiale. (ii) L'amplitude du deuxième harmonique s'annule au point de récurrence. La discontinuité de phase de π apparaît à ce point. (iii) La vitesse de phase du deuxième harmonique est supérieure à la vitesse de phase linéaire de même fréquence. Elle est toutefois inférieure à celle du mode fondamental. (iv) La vitesse de phase de ce dernier croît en fonction de l'amplitude initiale.

Quant à la formation et l'interaction des solitons, nous avons vérifié : (v) La superposition du mode fondamental et de son deuxième harmonique peut reconstituer la forme du soliton de façon satisfaisante. (vi) Cette superposition décrit bien l'interaction entre les deux solitons.

Tous ces résultats coïncident avec les résultats expérimentaux d'Ikezi dans le cas où deux solitons sont engendrés sur une longueur d'onde du mode fondamental, bien que le point (iv) ne soit pas encore vérifié expérimentalement.

6. REMARQUES

Nous avons résolu dans le paragraphe 5 du chapitre précédent et dans ce chapitre, l'équation de K-dV par trois méthodes différentes. Nous allons expliquer divers résultats obtenus en tenant compte à la fois de l'effet dispersif et de l'effet non-linéaire. La solution des deux premières méthodes est déterminée par un seul paramètre $a\psi_o^{1/2}$ ou, ce qui revient au même, par $\sigma = \sqrt{2}a\psi_o^{1/2}$, au cas où une forme de la perturbation initiale est donnée. a est une largeur de la perturbation. Comme la largeur donne une longueur d'onde typique, 1/a est une quantité qui mesure l'effet de dispersion. ψ_o étant une amplitude de la perturbation, il représente l'intensité de non-linéarité. Alors $a\psi_o^{1/2}$ représente le rapport entre l'effet dispersif et l'effet non-linéaire. ΔS est, lui aussi, un paramètre qui détermine le rapport entre la dispersion Ω^2 et la non-

linéarité $\rho_1(0)$. C'est-à-dire qu'une solution de l'équation de K-dV, quelle que soit la méthode de résolution, est régie par un seul paramètre défini comme le rapport entre la dispersion et la non-linéarité.

Les deux premières méthodes, méthode des lois de conservation et méthode de diffusion inverse, permettent de donner une solution générale. Autrement dit, on obtient, en principe, une solution de N solitons à partir de l'équation (I.21) ou (I.37). En revanche, la méthode du couplage de modes est restrictive. Néanmoins elle peut décrire de façon claire la formation de deux solitons et la récurrence d'un état initial. Cette méthode est essentiellement équivalente à celle de couplage de trois modes du type dégénéré.

REFERENCES

(1) S.Watanabe, J.Plasma Phys., 13, 217 (1975)

(2) H.Ikezi, Phys.Fluids, 16, 1668 (1973)

(3) J.A.Armstrong, N.Bloembergen, J.Ducuing et P.S.Pershan, Phys.Rev., 127, 1918 (1962)

(4) T.Ohnuma et Y.Hatta, J.Phys.Soc.Japan, 29, 1597 (1970)

(5) L.Mix, L.N.Litzenberger et G.Bekefi, Phys.Fluids, 15, 2020 (1972)

(6) N.J.Zabusky et M.D.Kruskal, Phys.Rev.Lett., 15, 240 (1965)

(7) C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal et R.M.Miura, Phys. Rev.Lett., 19, 1095 (1967).

o o
o

CHAPITRE 3

SOLITONS ENGENDRES PAR UNE IMPULSION

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous décrivons la formation expérimentale de solitons acoustiques ioniques au moyen d'impulsions positives appliquées à une grille dans un plasma.

Depuis plus de dix ans, on utilise une grille pour exciter les ondes électrostatiques et examiner leurs propriétés telles que la relation de dispersion et l'amortissement Landau. Cette méthode est simple mais elle présente quelques défauts : (i) On ne peut pas provoquer une perturbation de grande amplitude au moyen d'une grille, si bien que cette méthode n'est pas adaptée aux études sur la propagation non-linéaire d'ondes électrostatiques. (ii) L'excitation d'une onde électrostatique par grille s'accompagne indubitablement de l'excitation d'un mode balistique. On confondait souvent celui-ci avec l'onde collective comme on l'a déjà vu dans le chapitre I.

Afin d'éviter ces défauts, Taylor et al.[1] ont fabriqué la machine D-P et réussi à exciter une grande perturbation qui conduit au soliton acoustique ionique[2].

Malgré tous les défauts de la méthode de la grille, on peut cependant exciter des solitons acoustiques ioniques, si on choisit bien les paramètres du plasma et met au point la méthode d'excitation de perturbations.

2. METHODE EXPERIMENTALE

Afin de produire des solitons acoustiques ioniques, nous employons une fonction escalier. Supposons que la polarisation d'une grille soit négative à $\tau < 0$, soit $-V$, mesurée par rapport au potentiel de plasma. Au temps zéro, on applique à la grille une impulsion positive d'amplitude ΔV et de durée très longue par rapport au phénomène observé. Alors la polarisation de la grille varie de $-V$ à $-V+\Delta V$. Cette variation de potentiel libère une partie des ions piégés dans une gaine autour de la grille. A cause de l'épaisseur finie de la gaine, la densité des ions libérés aurait une distribution spatiale localisée à $\tau = 0$ et donne ainsi une perturbation initiale dans le plasma. Cette perturbation peut conduire à produire des solitons. L'épaisseur de la gaine grandit lorsque la polarisation négative, $-V$, croît[3], tandis que l'amplitude de la perturbation initiale augmente quand le potentiel escalier, $-\Delta V$, croît.

Dans le cas de l'excitation des solitons au moyen d'une grille, on affronte alors deux difficultés pour résoudre l'équation de K-dV. (i) Des solitons peuvent se propager suivant deux directions, à droite et à gauche de la grille, alors que l'équation de K-dV (I.4) et (I.5) décrit la propagation à droite. (ii) On ne connait pas une distribution de la densité des ions libérés. Pour pallier ces difficultés, on fait les deux hypothèses suivantes : (a) on suppose que les ions libérés à droite de la grille au temps zéro donnent naissance à la perturbation initiale conduisant aux ondes qui se propagent à droite. La même perturbation initiale sera introduite pour les ondes se propageant à gauche. Alors il suffit de ne considérer que la propagation de l'onde à droite, les ondes se propageant en sens inverse étant considérées comme image de l'autre. (b) on suppose la distribution initiale des ions libérés sous la forme suivante

$$\psi(\xi,\tau=0) = \psi_o \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{a}\right) , \qquad (1)$$

et

$$\psi(\xi,\tau=0) = \psi_o\{\theta(\xi+a) - \theta(\xi-a)\}, \qquad (2)$$

où le $\theta(\xi)$ représente la fonction escalier :

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1 , & \xi \geq 0 \\ 0 , & \xi < 0 \end{cases}$$

et 2a représente une largeur de l'ordre de l'épaisseur de la gaine normalisée par rapport à λ_D à $\tau \leq 0$. Dans les équations (1) et (2), l'origine $\xi = 0$ ne coïncide pas avec la position de la grille. Ceci n'introduit pas une difficulté puisque nous considérons seulement des solutions de l'équation de K-dV à $|\tau| \to \infty$. En d'autres termes on n'a pas besoin de connaître la position exacte de chaque soliton.

On a déjà obtenu, dans le chapitre II, la solution de l'équation de K-dV avec les conditions initiales (1) et (2), figure 4.

3. RESULTATS EXPERIMENTAUX

Le plasma produit par une décharge continue dans un tube de verre a un diamètre de 23 cm et une longueur de 32 cm. Confiné par le champ magnétique multipolaire[4], le plasma est relativement homogène et calme. Au centre du plasma le champ magnétique, étant très faible, ne joue pas un rôle essentiel. La cathode est faite d'un filament de tungstène de diamètre 0,2 ou 0,3 mm et de longueur 10 cm, alors que l'anode est composée de plaques d'acier inoxydable qui recouvrent les surfaces des aimants. Le gaz employé est l'argon à la pression de 0,7 à $2{,}0\times10^{-4}$ Torr. La densité du plasma est comprise entre 1,0 et $2{,}0\times10^{9}$ cm^{-3}, la température électronique (en unité d'énergie) a pour valeur 1,5∿20 eV, tandis que la température ionique est inférieure à Te/10. Une grille fine de diamètre 10 cm excite l'onde ionique que l'on détecte au moyen d'une sonde plane de diamètre 0,6 cm. Tandis que la polarisation de la grille est négative, -60 à -100 volts, par rapport au potentiel plasma, celle de la sonde est positive. Afin d'exciter des solitons, on applique le potentiel en escalier à la grille. L'amplitude est supérieure à la température électronique Te/e mais inférieure à 30 volts. Dans ces conditions le potentiel de la grille est

toujours inférieur au potentiel plasma et au potentiel flottant. Le temps de montée de la fonction escalier étant inférieur à la période de plasma ionique, on peut supposer que la perturbation est donnée instantanément dans le plasma. On employe un "Boxcar Integrator" comme un détecteur cohérent. (voir figure 10).

3.1. Propriétés dispersives

On montre un exemple de relation de dispersion de l'onde ionique sur la figure 11. Pour mesurer celle-ci, on applique un signal sinusoïdal de petite amplitude à la grille et on utilise la méthode de corrélation croisée[5]. La courbe pleine sur la figure donne la relation de dispersion de l'équation (I.1) pour le rapport $T_e/T_i = 16$. On constate le ralentissement de la vitesse de phase dans la région des grands nombres d'ondes, ce qui est en bon accord avec la théorie.

Lorsqu'on applique une fonction escalier de petite amplitude à la grille, on observe un autre exemple d'effet dispersif. La perturbation donnée à $t = 0$ ($\tau=0$) étant une impulsion, elle possède une largeur spectrale, si bien qu'elle s'élargit spatialement à cause de l'effet dispersif. Un paquet d'onde est alors formé (figure 12). En même temps la période des oscillations T dans le paquet augmente. La figure 13 montre que l'intervalle de temps entre les deux premiers pics varie selon la relation $T \propto x^{0,36}$, résultat en bon accord avec la théorie linéaire (I.7).

3.2. Condition pour la formation des solitons

Dans l'expérience décrite ci-dessous on observe la formation de solitons, seulement à basse pression d'argon, $P \lesssim 2{,}0\times10^{-4}$ Torr. La figure 14 montre un exemple typique de réponse à une tension en escalier en fonction de la pression. A haute pression, on observe un paquet d'ondes oscillantes. Réduisant la pression, la première oscillation dans le paquet d'onde commence à ressembler à la forme du soliton. On constate

la formation de deux solitons accompagnant un paquet d'onde à la pression de 1×10^{-4} Torr. On peut faire deux remarques sur la figure 14. Réduisant la pression, (i) la vitesse de l'onde croît, (ii) l'amplitude de l'onde croît. Le premier point est dû à l'accroissement de la température électronique[4] et le deuxième sans doute à l'accroissement du rapport de la température T_e/T_i. A haute pression, la perturbation s'amortit avant de donner naissance aux solitons à cause de l'interaction onde-particule. Il y a donc, dans ce cas, formation d'un paquet d'onde. A basse pression, au contraire, comme la perturbation peut se propager sur une plus grande longueur, elle se transforme en solitons. Cependant, même à basse pression, on peut observer aussi la formation d'un paquet d'onde, si l'amplitude initiale est petite.

Nous observons les modes balistiques à 8 µsec sur chaque courbe de la figure 14. Pour former un soliton, l'amplitude de la tension ΔV appliquée à la grille étant toujours plus grande que la température électronique T_e/e, la vitesse du mode balistique est ainsi proportionnelle à $(\Delta V)^{1/2}$. On peut alors distinguer facilement ce mode du mode collectif[6]. Nous donnerons par la suite les résultats expérimentaux correspondant à des pressions inférieures à $2{,}0 \times 10^{-4}$ Torr.

La figure 15 montre l'évolution spatiale d'une perturbation. A 2 cm de la grille, nous observons deux grandes oscillations à la tête du paquet d'onde correspondant à des composantes haute fréquence. L'oscillation de grande amplitude évolue vers des solitons au cours de la propagation. Nous observons aussi, à 8 cm de la grille, trois solitons précédant le paquet d'onde. L'amplitude des solitons s'amortit ensuite graduellement sous l'effet de température ionique finie[7]. La distance nécessaire pour la formation d'un soliton dépend de l'amplitude initiale. Une grande perturbation initiale peut engendrer des solitons sur une distance plus faible.

Lorsqu'on renverse la polarité de la fonction escalier, il n' y a pas production de solitons. Comme la fonction escalier négative absorbe les ions autour de la grille une onde de raréfaction est excitée. Cependant nous n'avons pas observé de soliton de raréfaction dans notre expérience.

3.3. Propriétés fondamentales du soliton

On peut voir, sur la figure 16, une courbe représentant la largeur et la vitesse du soliton. La courbe en trait plein, théorique, est donnée par les équations (I.10) et (I.11), dans lesquelles on suppose ψ_∞ nul. La vitesse acoustique ionique c_s est une valeur expérimentale estimée à partir de la vitesse de la tête d'un paquet d'onde de petite amplitude. Pour obtenir la vitesse et l'amplitude du soliton, on prend une valeur moyennée sur une propagation de 5 cm. La figure 16 montre que la largeur expérimentale est toujours inférieure à la valeur théorique et la vitesse expérimentale supérieure. On constate, cependant, la diminution de la largeur et l'accroissement de la vitesse en augmentant l'amplitude. Il est donc raisonnable d'identifier ces résultats comme étant dus à la propagation d'un soliton. Le désaccord entre l'expérience et la théorie sera discuté au paragraphe 4 de ce chapitre.

Les propriétés du soliton montrées sur la figure 16 sont obtenues pour le plus grand pic dans la tête du paquet d'onde. On ne compare pas la largeur et la vitesse du deuxième ou du troisième pic avec la théorie, parce qu'ils ne sont pas assez bien séparés. Ces pics sont interprétés comme étant des solitons à partir de leur forme, oscillante ou non.

La figure 17 montre la variation de l'amplitude de chaque soliton, en fonction de l'indice de non-linéarité $a\psi_o^{1/2}$, où l'amplitude initiale ψ_o est évaluée à partir de celle de la perturbation observée à 2 cm de la grille. On mesure l'amplitude du soliton ψ_n à 8 cm de la grille. Pour estimer l'épaisseur de la gaine 2a, on extrapole la position du plus grand pic au temps zéro. Cela donne une épaisseur de gaine de 4,5 mm indépendante de l'amplitude de la tension appliquée. La longueur d'onde de Debye étant environ 0,2 mm, on obtient $a \approx 11$.

Lorsque l'indice de non-linéarité $a\psi_o^{1/2}$ est inférieur à 2,0, on n'observe aucun soliton. Dans ce cas, une fonction escalier de petite amplitude n'excite qu'un paquet d'onde. Deux solitons sont produits pour $a\psi_o^{1/2}$ entre 2,0 et 3,7, et trois solitons pour $a\psi_o^{1/2}$ supérieur à 3,7. Notre condition d'expérience

permet d'exciter trois solitons au maximum. Quand l'indice de non-linéarité augmente davantage l'amplitude de chaque soliton croît, mais elle reste cependant toujours inférieure à la valeur théorique donnée sur la figure 4. Ceci est dû à l'amortissement lié à la température ionique finie. L'amplitude observée du soliton est égale à environ le quart de la valeur théorique.

3.4. Collision de front entre deux solitons

La figure 18 montre la collision entre deux solitons se propageant en sens inverse. Afin de produire un deuxième soliton se propageant en sens inverse du premier, on met une autre grille de même forme et dimension dans le plasma. Nous observons leur interaction en déplaçant une sonde cylindrique entre les deux grilles. Un soliton se propageant à droite possède une amplitude plus grande. Les deux solitons se chevauchent pendant leur interaction, contrairement au cas où deux solitons se propageant dans le même sens[2]. Ils s'éloignent ensuite sans perdre leurs identités. L'amplitude à l'instant de la collision est une superposition linéaire de l'amplitude des deux solitons, compte tenu de la précision de l'expérience. On montre la trajectoire des deux solitons sur la figure 18. On y constate un retard de phase de chaque soliton causé par la collision frontale. Les deux solitons s'attirent pendant cette interaction. Ce retard de phase n'a pas été observé dans l'expérience d'Ikezi et al.[2].

4. DISCUSSION

Nous venons de mettre en évidence expérimentalement la formation d'un soliton par le moyen d'une tension en escalier appliquée à une grille et de comparer les propriétés fondamentales du soliton ainsi obtenu avec la théorie. Nous donnons, dans ce qui suit, quelques remarques importantes sur nos résultats.

La propagation d'un soliton est caractérisée par la compétition entre l'effet non-linéaire et l'effet dispersif.

Comme nous l'avons déjà montré dans le chapitre I, la température ionique diminue l'effet dispersif. Il s'en suit que la forme du soliton peut changer sous l'effet d'une température ionique finie. Comparons donc nos résultats avec la théorie qui tient compte de l'effet de la température ionique.

Sakanaka[8] a obtenu le premier une solution du genre soliton à partir du système d'équations suivant : équation de la continuité ionique, équation du mouvement des ions chauds, distribution de Boltzmann pour les électrons et équation de Poisson. La solution ainsi obtenue conduit à une largeur plus petite et une vitesse plus grande que celles obtenues à partir de l'équation de K-dV pour les ions froids. Pour une petite amplitude, $\psi << 1$, on a une solution en inverse du carré du sinus hyperbolique. La largeur D et la vitesse C du soliton s'écrivent alors

$$M = \frac{C}{C_S} \simeq 1 + \left(\frac{\frac{\theta}{3} + 3}{\theta + 3}\right) , \qquad (3)$$

$$\frac{D}{\lambda_D} \simeq \left[\frac{4\{M^2\theta + 3(M^2-1)\}}{(M^2-1)(\theta+3)}\right]^{1/2} , \qquad (4)$$

où $C_S = \{(T_e + 3T_i)/M\}^{1/2}$ est la vitesse de phase de l'onde acoustique ionique. Les équations (3) et (4) coïncident avec (I.10) et (I.11) dans la limite des ions froids si l'amplitude ψ est assez petite. Les courbes en petits pointillés sur la figure 16 représentent cette largeur et cette vitesse en supposant $\theta = 16$.

D'autre part, Tappert[9] a établi l'équation de K-dV en tenant compte de l'effet de la température ionique :

$$V_t + C_S V_x + \tfrac{1}{2}(\gamma+1)VV_x + \tfrac{1}{2}C_s\lambda_D^2(1+\tfrac{3}{\theta})^{-1}V_{xxx} = 0, \qquad (5)$$

où le V est la vitesse de l'écoulement ionique et $\gamma = (1+\frac{9}{\theta})(1+\frac{3}{\theta})^{-1}$, l'exposant adiabatique efficace. La vitesse et la largeur du soliton s'écrivent dans ce cas

$$\frac{C}{C_S} = 1 + \frac{1}{3}\frac{v_o}{C_o}\frac{1 + \frac{6}{\theta}}{1 + (\frac{3}{\theta})^{3/2}}, \qquad (6)$$

$$\frac{D}{D} = (\frac{6C_o}{v_o})^{1/2}\frac{(1 + \frac{3}{\theta})^{1/4}}{(1 + \frac{6}{\theta})^{1/2}}, \qquad (7)$$

où v_o/C_o est l'amplitude. Apparemment ces équations se réduisent à (I.10) et (I.11) pour $\theta \to \infty$, la limite des ions froids. Le résultat est indiqué sur la figure 16 par les courbes en grands pointillés.

Les théories qui tiennent compte de l'effet de température ionique finie donnent une vitesse plus grande et une largeur plus petite que la théorie ions froids, ce qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Les deux effets - grande vitesse et petite largeur - sont attribués à l'accroissement de la non-linéarité ainsi qu'à la diminution de la dispersion dû à l'effet de la température ionique finie.

La formation du soliton au moyen d'une grille est sensiblement différente de celle de la machine D-P. Dans la machine D-P, les ions, en grande quantité, sont envoyés dans le plasma cible à travers la grille de séparation en un intervalle fini de temps. Cette perturbation ionique forme des solitons au cours de son évolution. Par ce procédé, Ikezi[7] a observé sept solitons acoustiques ioniques. Pour l'excitation du soliton au moyen d'une grille, la gaine entourant la grille joue un rôle important. La perturbation ionique de petite amplitude est produite sur une étendue finie de l'espace seulement lorsqu'on y applique une tension escalier. La perturnation ainsi créée conduit à des solitons au cours de la propagation. Nous n'avons observé que trois solitons au maximum, à cause de la faible non-linéarité. La condition optimale pour produire un soliton est que la polarisation de la grille soit comprise entre -60 V et -100 V, par rapport au potentiel plasma. Pour une polarisation plus importante, $-V > -60$ volts, une tension en escalier de grande amplitude fait varier trop la densité du plasma d'équilibre. D'autre part, si la polarisation est trop basse, $-V < -100$ volts, l'épaisseur de la gaine croît, mais l'amplitude de perturbation initiale ψ_o décroît considérablement, de sorte qu'il est difficile d'observer la formation d'un soliton.

En ce qui concerne la collision de front, Ikezi et al.[2] n'ont observé aucun déphasage dans leur expérience et ont maintenu qu'il faudrait une amplitude plus grande pour vérifier une prédiction théorique basée sur un calcul numérique[10]. Bien que l'amplitude du soliton de notre expérience semble plus petite que celle d'Ikezi et al, nous avons pu observer un retard de phase qui est qualitativement en accord avec la solution numérique. Ce retard de phase observé étant très petit, environ 1 mm ou moins, nous ne pouvons donner aucune conclusion quantitative sur la façon dont il varie en fonction du rapport entre les amplitudes des deux solitons.

REFERENCES

(1) R.J.Taylor, K.R.Mackenzie et H.Ikezi, Rev.Sci.Instr., 43, 1675 (1972)

(2) H.Ikezi, R.J.Taylor et R.D.Baker, Phys.Rev.Lett., 25, 11 (1970)

(3) S.Watanabe, O.Ishihara et H.Tanaca, J.Plasma Phys., 8, 321 (1972)

(4) R.Rampaecher et K.R.Mackenzie, Rev.Sci.Instr., 44, 726 (1973)

(5) H.Ikezi et Y.Kiwamoto, Phys.Rev.Lett., 27, 718 (1971)

(6) G.Joyce, K.Lonngren, I.Alexoff et W.D.Jones, Phys.Fluids 12, 2592 (1969)

(7) H.Ikezi, Phys.Fluids, 16, 1668 (1973)

(8) P.H.Sakanaka, Phys.Fluids, 15, 304 (1972)

(9) F.D.Tappert, Phys.Fluids, 15, 2446 (1972)

(10) D.Biskamp et D.Parkinson, Phys.Fluids, 13, 2295 (1970).

o o
o

CHAPITRE 4

RECURRENCE DE L'ONDE IONIQUE NON-LINEAIRE

1. INTRODUCTION

Nous allons mettre en évidence expérimentalement la récurrence de l'onde ionique non-linéaire engendrée par un signal sinusoïdale appliqué à la grille. On examinera ici le cas où la non-linéarité est assez faible, si bien que le phénomène peut être décrit par un mode fondamental et son deuxième harmonique. Il est alors possible d'expliquer la récurrence, en utilisant directement des résultats théoriques présentés dans le chapitre 2. D'après cette théorie, trois modes avec leurs nombres d'onde et fréquences donnés, respectivement, par (K_1,Ω), $(K_2,2\Omega)$ et $(2K_1,2\Omega)$ peuvent se propager dans le plasma, bien qu'une seule onde de fréquence Ω soit appliquée à la grille ($x = 0$). Le nombre d'onde K et la fréquence Ω sont normalisés par rapport au nombre d'onde de Debye k_D et la fréquence de plasma ionique ω_{pi}. Les (K_1,Ω) et $(K_2,2\Omega)$ satisfont à la relation de dispersion, mais le mode $(2K_1,2\Omega)$ ne la satisfait pas. Notons que les deux harmoniques ont la même amplitude. La récurrence se produit à un point où les amplitudes des deux harmoniques s'annulent simultanément. La longueur de récurrence ℓ est alors donnée par

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 , \qquad (1)$$

où les λ et ω sont la longueur d'onde et la fréquence du mode fondamental. L'équation (1) est valable lorsque ΔS est supérieur à 6, avec ΔS défini par :

$$\Delta S = \frac{6}{\rho_1(0)}\left(\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right)^2 , \qquad (2)$$

où $\rho_1(0) = n_1(x)/n_o\big|_{x=0}$ est l'amplitude du mode fondamental au niveau de la grilel ($x = 0$).

Pour $\Delta S \gtrsim 6$, la vitesse de phase du deuxième harmonique est donnée par (voir Eq.(II.71))

$$C_{2\Omega} = \frac{2\Omega}{K_2 - \frac{\Delta K}{2}} , \qquad (3)$$

et celle du mode fondamental par

$$C_{\Omega} = \frac{\Omega}{K_1}$$

La vitesse de phase du deuxième harmonique est plus grande que celle de l'onde ionique linéaire de fréquence 2Ω, tandis que la vitesse de phase du fondamental coïncide avec la vitesse de phase linéaire.

La longueur de récurrence (1) a été obtenue à partir de l'équation de K-dV (I.5'). Celle-ci ne tient pas compte de l'effet de température ionique. Une température ionique finie, modifiant la relation de dispersion de l'onde ionique, a pour effet de modifier aussi la longueur de récurrence. Tappert et Judice[1] ont obtenu la longueur (ou temps) de récurrence à partir d'une équation (III.5) qui tient compte du rapport $\theta = T_e/T_i$. On reproduit ici leurs résultats :

$$\frac{\ell}{\lambda} = \{\pi(\gamma+1)\varepsilon\}^{-1} f(U) , \qquad (4)$$

où
$$f(U) = \frac{2}{3}\pi U , \qquad U << 1 \qquad (5)$$

$$= 2{,}92 U^{1/2} . \qquad U >> 1 \qquad (6)$$

L'exposant adiabatique efficace γ est donné par $(1+\frac{9}{\theta})(1+\frac{3}{\theta})^{-1}$ et le paramètre d'Ursell U défini par

$$U = \frac{\gamma+1}{2} \frac{\varepsilon\omega}{C_S k} \frac{1+3/\theta}{(k\lambda_D)^2} .$$

ε est l'amplitude de l'onde. Le paramètre d'Ursell U est lié au ΔS par la relation

$$U \simeq \frac{3}{\Delta S} ,$$

dans la limite $\theta \to \infty$. Si la non-linéarité est assez faible, $U << 1$, on obtient à partir des équations (4) et (5),

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{1}{3} \frac{\omega}{C_S k} \frac{1+3/\theta}{(k\lambda_D)^2} \cdot \qquad (7)$$

Dans le cas où $U << 1$, la longueur de récurrence est indépendante de l'amplitude initiale et est déterminée seulement par la fréquence. L'équation (7), qui est essentiellement équivalente à l'équation (1), décrit correctement l'effet de dispersion. En effet, la méthode du couplage de modes donne le résultat (7) à partir de l'équation de K-dV (III.5). On peut donc encore dire que les trois modes (K_1,Ω), $(K_2,2\Omega)$ et $(2K_1,2\Omega)$ existent simultanément dans le plasma pour $x > 0$, bien que leurs relations de dispersion soient modifiées par l'effet de la température ionique. Notons que l'équation (7) est valable jusqu'à $U = 2$ (voir figure 1 de la référence (1)).

2. METHODE EXPERIMENTALE

Afin d'observer le phénomène de récurrence de l'onde ionique non-linéaire, on applique un signal sinusoïdal de petite amplitude à la grille. La méthode de mesure ainsi que le dispositif expérimental étant les mêmes que dans le chapitre 3, nous donnerons tout de suite les résultats expérimentaux.

3. RESULTATS EXPERIMENTAUX

3.1. Relation de dispersion

Le plasma n'est pas homogène à proximité de la grille, puisque la grille rappelle des particules. Le courant de saturation électronique et le potentiel flottant sont représentés sur la figure 19(a) et (b) en fonction de la distance séparant la sonde de la grille. Les deux quantités décroissent au voisinage de la grille. Le courant de saturation étant proportionnel

à la densité, la figure 19(a) montre qu'à 2 cm de la grille la densité est réduite de 12 % par rapport à la densité mesurée aux points éloignés de la grille. Cependant cette inhomogénéité de la densité devient inférieure à 5 % pour $x \geq 4$ cm. La figure 19(c) montre un profil typique de l'onde ionique de petite amplitude. L'amplitude reste constante (ou croît un peu) au voisinage de la grille à cause de l'inhomogénéité de densité[2]. Loin de la grille, l'onde s'amortit lentement avec la distance. Ceci indique que la température ionique est inférieure à $T_e/10$.

L'excitation des ondes électrostatiques au moyen de la grille s'accompagne de celle d'un mode balistique. On a confondu souvent les deux modes[3]. Afin de vérifier si le mode collectif, onde acoustique ionique, est plus fort que le mode balistique, nous examinons la relation de dispersion de l'onde excitée en fonction de l'amplitude du signal appliqué à la grille. Dans ce but on emploie la méthode de corrélation croisée[4]. La figure 20 montre des relations de dispersion obtenues lorsque la sonde de détection est à 7 cm de la grille. La relation de dispersion coïncide avec l'équation (I.1) jusqu'à la fréquence $\sim 0{,}7\ \omega_{pi}$, si l'amplitude est petite (0,2 Vp-p) ou moyenne (2 Vp-p). En revanche, lorsqu'une onde de grande amplitude (4 Vp-p) est excitée, on constate que la vitesse de phase décroît plus vite que celle de l'onde linéaire dans la région où $\omega \gtrsim 0{,}5\ \omega_{pi}$. L'examen attentif de la forme de l'onde à proximité de la grille nous permet de constater qu'un signal de grande amplitude, fortement amorti dans la gamme de fréquences supérieures à $0{,}4 \sim 0{,}5\ \omega_{pi}$, existe même pour une tension d'excitation assez faible. On considère que ce signal est dû à la contribution balistique. Dans la gamme de fréquences où $\omega \lesssim 0{,}4 \sim 0{,}5\ \omega_{pi}$, on n'observe pas de signal balistique pour l'amplitude d'excitation jusqu'à 4 Vp-p même près de la grille. On voit, cependant, que la longueur d'onde du mode ionique est légèrement plus petite que celle observée loin de la grille. Ceci est dû probablement à l'inhomogénéité de la densité. On peut alors dire que le mode balistique, s'il existe, est moins intense que l'onde ionique et qu'il ne modifie pas considérablement la propagation de l'onde ionique dans les conditions expérimentales de l'expérience.

3.2. Récurrence de l'onde ionique

Un exemple expérimental est donné sur la figure 21. La courbe (a) représente la forme de l'onde en fonction de la distance par rapport à la grille. On l'obtient à partir du courant de saturation électronique détecté par la sonde, en utilisant le "Boxcar Integrator", dont l'impulsion d'échantillon est synchronisée avec une certaine phase du signal appliqué, et en déplaçant la sonde. La forme observée est différente de celle prévue par la théorie (voir la figure 8 du chapitre II). Selon le calcul numérique, l'onde se raidit d'abord, puis un petit pic (ou de petits pics en général) émerge de l'arrière du grand pic. Comme le petit pic se propage lentement, il disparaît dans le grand qui le suit et la récurrence se produit. Dans l'expérience, nous n'observons pas de raidissement de l'onde au voisinage de la grille. Cela est dû au fait qu'un deuxième harmonique est aussi produit par l'effet de non-linéarité produit par la gaine autour de la grille. Une forme à peu près identique se répète à 2,3 cm, 5,3 cm et 10,5 cm où le grand pic dépasse le petit. Ces points sont marqués par des lignes en pointillé. Les courbes (b) et (c) de la figure 21 montrent les oscillations des amplitudes du mode fondamental et de son deuxième harmonique. Le premier est maximum à 2,9 cm et 5,5 cm, tandis que le deuxième a ses minima à 2,2 cm, 5,3 cm et 10,5 cm. Les points où le grand pic dépasse le petit correspondent, avec une erreur maximum de 0,6 cm, à ceux où l'amplitude du mode fondamental est maximum et celle du deuxième harmonique minimum. Il est alors raisonnable de définir ce point comme le point de récurrence et la distance entre deux points de récurrence comme la longueur de récurrence bien que la forme initiale n'y réapparaisse pas.

On peut faire ici quelques remarques sur la figure 21. (a) au premier et au deuxième points de récurrence, l'amplitude du fondamental devient maximum. Mais, au troisième point, il ne l'est plus, puisque l'amplitude décroît fortement et que la non-linéarité est déjà assez faible. (b) L'amplitude du deuxième harmonique n'est pas nulle aux points de récurrence.

Cela indique que les amplitudes de deux modes $(K_2,2\Omega)$ et $(2K_1,2\Omega)$ sont différentes. Au voisinage de la grille par exemple, le mode $(K_2,2\Omega)$ possède une plus grande amplitude puisqu'il est produit à la fois dans la gaine et dans le plasma, par suite du couplage avec le mode fondamental. Cette différence des amplitudes masque également la discontinuité de phase au point de récurrence. (c) La forme de l'onde est légèrement différente à chaque point de récurrence. Au premier point, les deux pics ne coalescent pas, mais au troisième point, le grand pic absorbe le petit et la forme devient sinusoïdale. (d) La première longueur de récurrence (la distance entre le premier et le deuxième points de récurrence) est plus courte que la deuxième. (e) On peut vérifier une relation qui existe entre la variation de phase (II.61) et la deuxième longueur de récurrence. On trouve sur cette longueur 8,5 périodes du mode fondamental et 17,5 du deuxième harmonique. D'autre part, sur la première longueur de récurrence, cette relation n'est pas satisfaite, probablement parce que l'amplitude du deuxième harmonique n'est pas petite.

La table 3 montre les longueurs d'onde de chaque mode et le rapport des vitesses de phase $C_{2\Omega}/C_{\Omega}$ obtenus à partir de la figure 21. La longueur d'onde du fondamental est à peu près constante à l'exception de la région voisine de la grille, tandis que la variation de la longueur d'onde du deuxième harmonique est plus forte que celle du fondamental. Le rapport de la vitesse de phase entre deux modes $C_{2\Omega}/C_{\Omega}$ croît avec la distance. La valeur théorique en est 0,95, lorsqu'on utilise la relation de dispersion expérimentale afin de calculer le déphasage ΔK. A proximité de la grille le rapport expérimental s'est trouvé plus petit que le rapport théorique. Ceci s'explique par le fait que l'amplitude du mode $(K_2,2\Omega)$ est plus grande que celle du mode $(2K_1,2\Omega)$. Loin de la grille, $x \geq 10$ cm, ce rapport est supérieur à 0,95, ce qui signifie que la vitesse de phase du deuxième harmonique est presque égale à celle du fondamental. Ce résultat, lié aux propriétés (c) et (d) mentionnées ci-dessus, suggère que l'amplitude du mode $(2K_1,2\Omega)$ est plus grande que celle du mode $(K_2,2\Omega)$.

3.3. Accroissement de la longueur de récurrence

La figure 22 montre la variation de la récurrence de l'onde pour différentes fréquences. La longueur de récurrence décroît assez rapidement lorsque la fréquence croît. Nous avons vérifié expérimentalement que la longueur de récurrence est indépendante de l'amplitude de la tension, lorsqu'elle est inférieure à 4 Vp-p. Le résultat de la figure 22 est présenté sur la table 4. L'amplitude de l'onde est mesurée sur la première oscillation, c'est-à-dire à 1 cm environ de la grille (voir la figure 22). Puisqu'on examine la récurrence dans une région où l'onde est légèrement amortie, elle est surestimée. On évalue ensuite les ΔS et U à partir de cette amplitude en supposant que l'amplitude du deuxième harmonique est nulle. Le U est donc surestimé et le ΔS sousestimé. Le S étant supérieur à 6, l'équation (1) reste valable. Il en est de même pour l'équation (7), puisque $U \lesssim 2$. Les deux théories qui tiennent compte ou non de la température ionique suggèrent alors que la longueur de récurrence doit être indépendante de l'amplitude de l'onde. C'est ce qu'on a vérifié expérimentalement. La longueur de récurrence expérimentale est toujours supérieure à celle obtenue de la théorie des ions froids. Ceci est dû à un effet dispersif beaucoup plus important que ne prévoit la théorie des ions froids. Pour les fréquences de 350 KHz et 375 KHz, la longueur de récurrence coïncide avec la théorie des ions chauds, mais pour 325 KHz elle est supérieure à la valeur théorique. Pour les fréquences encore plus basses, on n'observe pas la récurrence jusqu'à 18 cm de la grille. Même dans le cas de 375 KHz et 350 KHz, la deuxième longueur de récurrence indiquée entre parenthèses devient supérieure à celle de la théorie des ions chauds. Cet accroissement n'est pas dû à la diminution de l'amplitude, c'est-à-dire à l'amortissement de l'onde, si on rappelle que la longueur de récurrence ne dépend pas de l'amplitude de l'onde. L'accroissement n'est pas non plus causé par une inhomogénéité de densité. S'il en était ainsi, la longueur de récurrence devrait croître d'environ 10 % au maximum, puisqu'elle est proportionnelle à la densité de plasma. Mais on observe expérimentalement un accroissement d'environ 50 %.

3.4. Trajectoire des pics

La longueur de récurrence croît par suite de la vitesse du petit pic qui s'approche de la vitesse du grand, phénomène qui est clairement observé sur chaque courbe dans les figures 21 et 22. C'est-à-dire que le retard de phase du petit pic par rapport à la phase du grand pic devient de plus en plus petit lorsque la distance à la grille croît. On peut le voir plus quantitativement sur la trajectoire de chaque pic dans la figure 23. Afin d'obtenir cette évolution temporelle de l'onde, on déplace le temps d'échantillonnage du "Boxcar Integrator" par pas de 0,5 µsec par rapport à une certaine phase du signal appliqué. La trajectoire est montrée dans un repère de l'onde se déplaçant avec la vitesse de phase du mode fondamental de petite amplitude. Alors la ligne verticale dans la trajectoire donne la vitesse de phase du mode linéaire. Notons qu'en 4,5 µsec les pics se propagent de 7,5 à 9,0 cm dans un repère du laboratoire dépendant de leur position initiale. Le grand cercle indique le point où le grand pic rattrape le petit. Cette position est à 2,5 cm et 6,7 cm de la grille dans un repère du laboratoire. A proximité de la grille (à gauche du diagramme), les deux pics s'avancent vers la gauche avec le temps, bien que la pente du petit pic soit petite. Cela signifie que tous les deux pics possèdent une vitesse inférieure à celle du mode fondamental linéaire et que le petit pic se propage plus lentement que le grand. En augmentant la distance par rapport à la grille (allant vers la droite du diagramme) la pente de chaque pic devient plus grande. Les quelques dernières trajectoires à droite sont à peu près verticales, même pour le petit pic. C'est-à-dire que la vitesse des pics s'approche de la vitesse de phase de l'onde ionique linéaire et que le rapport de la vitesse entre deux pics est presque l'unité.

Jusqu'ici nous avons examiné le phénomène de récurrence de l'onde ionique dans la région où deux pics apparaissent sur une longueur d'onde du mode fondamental. Cela correspond au cas où les amplitudes des harmoniques d'ordre supérieur ou égal à trois sont plus petites que celles des deux premièrs modes[5].

Dans la gamme des fréquences plus basses, on observe des pics plus nombreux sur une longueur d'onde du mode fondamental et l'oscillation d'amplitude de chaque mode est plus complexe. Mais nous n'aborderons pas ce sujet ici.

4. DISCUSSION

Résumons des résultats expérimentaux avant d'en discuter. La longueur de récurrence de l'onde ionique de basse fréquence est toujours plus longue que la valeur théorique. Pour les plus hautes fréquences, la longueur coïncide avec la théorie, mais la deuxième longueur de récurrence est supérieure et ne coïncide plus avec la théorie. Les vitesses de signal du petit et du grand pic, ainsi que la vitesse de phase du deuxième harmonique, s'approchent de la vitesse de phase linéaire du mode fondamental, lorsqu'ils se propagent loin de la grille. Leur forme à chaque point de récurrence change graduellement.

Comme on l'a montré dans le chapitre 2, trois modes (K_1,Ω), $(K_2,2\Omega)$ et $(2K_1,2\Omega)$ se propagent dans un plasma, bien qu'une seule onde existe originellement en $\xi = 0$ $(x = 0)$. Les deux ondes de fréquence 2Ω ont la même amplitude. Dans cette expérience, l'onde $(K_2,2\Omega)$ est aussi produite par la non-linéarité de la gaine et se propage dans le plasma. Nous reviendrons plus tard à discuter d'un rôle joué par l'onde $(K_2,2\Omega)$. Nous introduisons maintenant l'interaction onde-particule. Les vitesses de phase des ondes (K_1,Ω) et $(2K_1,2\Omega)$ sont égales, mais celle du mode $(K_2,2\Omega)$ est inférieure aux deux autres. La longueur de l'amortissement Landau normalisée par rapport à sa propre longueur d'onde est inférieure à celle des deux autres modes. Si l'on désigne par $L(K,\Omega)$ la longueur de l'amortissement Landau d'un mode (K,Ω), on obtient une relation $L(2K_1,2\Omega) > L(K_2,2\Omega)$. Alors la différence entre $L(K_2,2\Omega)$ et $L(2K_1,2\Omega)$ engendre une différence d'amplitude entre les deux modes en propagation. Par conséquent les deux harmoniques ne s'annulent pas au point de récurrence théorique, ce qui signifie que l'amortissement Landau rend la récurrence imparfaite. Un excès de l'amplitude

du mode $(2K_1,2\Omega)$ amène la vitesse de phase du deuxième harmonique, composée des modes $(K_2,2\Omega)$ et $(2K_1,2\Omega)$, vers la vitesse de phase du mode fondamental. Les vitesses du petit et du grand pics s'approchent alors de la vitesse de phase du mode (K_1,Ω) si bien que la distance qu'il faut au grand pic pour dépasser le petit augmente. Enfin, à cause de l'amortissement Landau, la récurrence devient imparfaite et la longueur de récurrence croît.

Le rôle de l'onde $(K_2,2\Omega)$ produite dans la gaine n'est pas important dans toute la discussion donnée ci-dessus. L'existence de cette onde rend l'amplitude du mode $(K_2,2\Omega)$ supérieure à celle du mode $(2K_1,2\Omega)$ au premier stade d'une évolution. La vitesse de phase du deuxième harmonique composé de ces deux ondes $(K_2,2\Omega)$ et $(2K_1,2\Omega)$ est par conséquent plus petite que celle donnée par l'équation (3). Dans une région loin de la grille, l'amplitude du mode $(K_2,2\Omega)$ devient inférieure à celle du mode $(2K_1,2\Omega)$, l'amortissement Landau du premier étant plus grand. La discussion ci-dessus n'est alors valable que dans cette région.

Dans l'expérience, on a observé l'approche de la vitesse de phase du deuxième harmonique vers celle du fondamental, lorsque la distance à la grille croît. A cause de cet effet, les vitesses du grand et du petit pics s'approchent de la vitesse de phase du mode fondamental. On a aussi observé expérimentalement que la longueur de récurrence augmente à cause de l'accroissement de la vitesse de phase du deuxième harmonique. Ces résultats sont qualitativement en accord avec l'explication basée sur l'amortissement de Landau mentionnée précédemment.

La forme de l'onde n'est pas identique à chaque point de récurrence. A proximité de la grille, les deux pics ne coalescent pas, du fait que l'amplitude du mode $(K_2,2\Omega)$ est supérieure à celle du mode $(2K_1,2\Omega)$. Maus au deuxième ou troisième point de récurrence, elle devient sinusoïdale. Ce changement de forme indique que l'amplitude du mode $(K_2,2\Omega)$ s'amortit plus vite par effet Landau. S'il n'y a pas d'amortissement Landau, la même forme doit réapparaître à chaque point de

récurrence. Dans ce sens, notre résultat montre que la récurrence devient imparfaite à cause de l'amortissement Landau.

La discussion ci-dessus est valable, lorsque la longueur de l'amortissement est du même ordre de grandeur que celle de récurrence. Si la longueur de l'amortissement devient plus courte, l'onde s'amortit avant que la récurrence ne se produise. Dans ce cas, le deuxième harmonique ne présente qu'un maximum [6,7]. Si, au contraire, la longueur de récurrence est plus courte que celle de l'amortissement, la récurrence pourrait être observée comme elle est prévue par la théorie basée sur l'équation de K-dV. Afin de réaliser une telle situation, la température électronique doit être nettement supérieure à celle ionique, $T_e/T_i \gtrsim 15$. L'amortissement de Landau est alors négligeable sur une distance égale à la longueur de récurrence.

Pour terminer, nous expliquons pourquoi l'on n'a pas utilisé le terme "soliton" dans ce chapitre. Dans le chapitre 2, nous avons employé le terme "soliton" afin d'expliquer la récurrence d'un état initial. Nous avons utilisé ici le terme "onde ionique non-linéaire". Pour examiner si un pic observé satisfait bien à la condition de soliton, il est nécessaire de déterminer l'un des trois paramètres qui caractérisent chaque pic, amplitude $(\psi_o-\psi_\infty)$, longueur D/λ_D et rapport de vitesse C/C_S. On peut alors en déduire facilement les deux autres paramètres en utilisant la "condition de soliton" et les comparer avec les résultats expérimentaux. Le point crucial de ce procédé est qu'on n'a pas de méthode permettant de déterminer ψ_∞ expérimentalement. Certes, le ψ_∞ peut être calculé si le rapport C/C_S est obtenu expérimentalement, mais ce n'est pas une valeur expérimentale. On ne peut donc pas comparer directement des résultats expérimentaux avec la "condition de soliton" comme on le fait sur les solitons acoustiques ioniques engendrés par une impulsion.

REFERENCES

(1) F.D.Tappert et C.N.Judice, Phys.Rev.Lett., 29, 1308 (1972)

(2) H.J.Doucet, W.D.Jones et I.Alexeff, Phys.Fluids, 17, 1738 (1974)

(3) G.Joyce, K.Lonngren, I.Alexeff et W.D.Jones, Phys.Fluids, 12, 2592 (1969)

(4) H.Ikezi et Y.Kiwamoto, Phys.Rev.Lett., 27, 718 (1971)

(5) H.Ikezi, Phys.Fluids, 16, 1668 (1973)

(6) T.Ohnuma et Y.Hatta, J.Phys.Soc.Japan, 29, 1597 (1970)

(7) L.P.Mix, L.N.Litzenberger et G.Bekefi, Phys.Fluids, 15, 2020 (1972)

(8) S.Watanabe, O.Ishihara et H.Tanaca, Plasma Physics.

o o
o

CHAPITRE 5

CONCLUSION

Nous allons résumer les principaux résultats obtenus dans les chapitres précédents.

Après avoir établi, au deuxième chapitre, à partir de l'équation de K-dV, un système de deux équations décrivant les deux modes couplés, mode fondamental et son deuxième harmonique, nous avons donné l'expression exacte de leur amplitude. L'extremum (pic) de l'amplitude obtenu par la superposition de ces deux modes satisfait approximativement aux conditions du soliton au sens de Zabusky et Kruskal. Par ailleurs, le nombre de solitons obtenu par notre méthode est en bon accord avec la méthode de la diffusion inverse qu'ont utilisée Gardner et al.

La longueur de récurrence, sur laquelle le soliton reprend sa forme initiale, a été donnée dans le cas de la faible non-linéarité en fonction du rapport de la dispersion sur la non-linéarité. Ces résultats peuvent être considérés comme étant la version analytique, dans le cas le plus simple, du calcul numérique de Zabusky et Kruskal. Notre méthode, analytique, nous a permis d'élucider diverses propriétés du soliton que ces auteurs n'ont pas trouvées dans leur approche numérique. Ces nouvelles propriétés permettent d'expliquer presque parfaitement les résultats expérimentaux d'Ikezi sur la récurrence du soliton excité par une onde sinusoïdale. Notre méthode du couplage des modes peut être étendue au cas où le soliton K-dV contient les composantes d'harmoniques d'ordre plus élevé que deux. Cependant, une solution analytique d'un tel système d'équations n'est pas encore connue. La complexité des calculs justifierait alors un recours à l'approche numérique.

Au troisième chapitre nous avons mis en évidence la possibilité d'excitation d'un soliton au moyen d'une grille ; la gaine formée autour de la grille joue un rôle important.

Le soliton créé par cette méthode satisfait à la condition du soliton, c'est-à-dire, à la relation qui relie l'amplitude, la largeur et la vitesse. Le nombre de solitons excités est en bon accord avec celui obtenu par la méthode de la diffusion inverse. Nous avons observé un décalage de phase lors de la collision frontale de deux solitons.

La méthode d'excitation des solitons est évidemment différente de celle d'Ikezi et al. qui ont utilisé la machine D.P. Ces derniers ont produit deux plasmas indépendants de deux côtés d'une grille séparatrice et ont ensuite appliqué un potentiel positif à l'un d'entre eux (plasma source) pour injecter un grand nombre d'ions à l'autre plasma (plasma cible). La grille séparatrice ne joue pas un rôle d'excitateur, comme dans notre expérience, et son potentiel doit être maintenu au potentiel flottant du plasma cible. Lorsqu'on applique une tension alternative au plasma source, le potentiel de la grille varie, lui aussi, avec cette tension. De toute façon, quand on excite des ondes acoustiques ioniques et des solitons sur la machine D.P., on ignore encore si l'agent excitateur est le plasma source ou la grille. Sur ce point il est clair que notre méthode d'excitation a levé l'ambiguïté.

Les propriétés dessolitons créés par une grille sont essentiellement analogues à ceux de la machine D.P., ce qui prouve que des solitons ont été effectivement observés.

Au quatrième chapitre, nous avons étudié le problème de récurrence de l'onde ionique. Si la longueur de récurrence est courte et les fréquences sont relativement élevées, la longueur de récurrence observée est en excellent accord avec celle prévue par la théorie. En revanche, dans la gamme de basses fréquences, la valeur expérimentale est beaucoup plus grande que la valeur théorique. Il en est de même pour la deuxième longueur de récurrence pour les fréquences élevées. L'accroissement de la longueur de récurrence pourrait alors être expliqué qualitativement par l'interaction onde-particule.

Dans le problème de la propagation non-linéaire des ondes d'amplitude finie, l'interaction onde-particule intervient à travers l'amortissement Landau linéaire ou non-linéaire et le

piégeage de particules. Parmi ces trois mécanismes, l'un ou l'autre des deux premiers pourrait expliquer les résultats expérimentaux décrits plus haut. Il faut ajouter alors, dans l'équation de K-dV, un terme non-local linéaire ou non-linéaire selon qu'il s'agit de l'amortissement Landau linéaire ou non-linéaire. Notre problème s'inscrit, en ajoutant un terme d'intégrale non-locale, dans le contexte plus général de la modification apportée à une équation aux dérivées partielles non-linéaires qui décrit la propagation "non-linéaire" d'ondes dans un milieu dispersif. Dans notre cas, le rapport de la température électronique sur la température ionique n'étant pas très grand, l'effet de l'amortissement Landau non-linéaire ne semble pas important. Il en résulte que nous pourrions expliquer les phénomènes observés à l'aide de l'équation de K-dV modifiée, obtenue par Vandam et al.[1]. Enfin, pour mieux comprendre notre expérience dans son ensemble, il semble nécessaire de résoudre analytiquement l'équation de Vandam.

REFERENCE

(1) J.M.Vandam et T.Taniuti, J.Phys.Soc.Japan 35, 897 (1973).

o o
o

Peak no.	Amplitude $-\psi_\infty$	Amplitude $\psi_0 - \psi_\infty$	Width Observ.	Width Calcul.	Velocity Observ.	Velocity Calcul.
1	0.035	0.122	0.210	0.228	1.021	1.006
2	0.055	0.156	0.188	0.202	0.984	0.997
3	0.061	0.169	0.172	0.194	0.991	0.995
4	0.061	0.169	0.175	0.193	0.984	0.995
5	0.056	0.155	0.192	0.202	1.000	0.996
6	0.029	0.114	0.205	0.235	1.031	1.010
7	0.127	0.097	—	0.256	0.925	0.906
8	0.143	0.114	—	0.236	0.936	0.895
9	0.122	0.092	—	0.263	0.922	0.909

TABLE 1 Propriété de soliton. $\Delta S = 3$. $\Omega = 0.2$.

	Width		Velocity	
ΔS	Observ.	Calcul.	Observ.	Calcul.
7	0.260	0.270	0.988	0.979
5	0.205	0.230	0.998	0.982
3	0.175	0.193	0.984	0.995
2	0.145	0.168	0.993	1.019
1.5	0.135	0.155	0.988	1.048
1.0	0.115	0.137	1.000	1.111
0.8	0.105	0.129	1.005	1.162

TABLE 2 Propriété de soliton. $\Omega = 0.2$.

	DISTANCE		
	3 ∿ 5 cm	7 ∿ 9 cm	12 ∿ 14 cm
Wavelength (fundamental)	0,52 cm	0,62 cm	0,65 cm
Wavelength (2nd harmonic)	0,24 cm	0,30 cm	0,32 cm
Velocity ratio $c_{2\Omega} / c_{\Omega}$	0,93	0,96	0,99

TABLE 3

Frequency	Amplitude	l/λ (exp.)	ΔS	l/λ (cold ion)	U	l/λ (hot ion)
325 KHz ($0,26\ f_{pi}$)	$6,2\ 10^{-2}$	13	6,5	5,0	1,8	8,4
350 KHz ($0,28\ f_{pi}$)	$7,6\ 10^{-2}$	8 (> 13)	6	4,3	2,0	7,8
375 KHz ($0,30\ f_{pi}$)	$9,0\ 10^{-2}$	7 (10)	6	3,7	2,2	7,3

TABLE 4

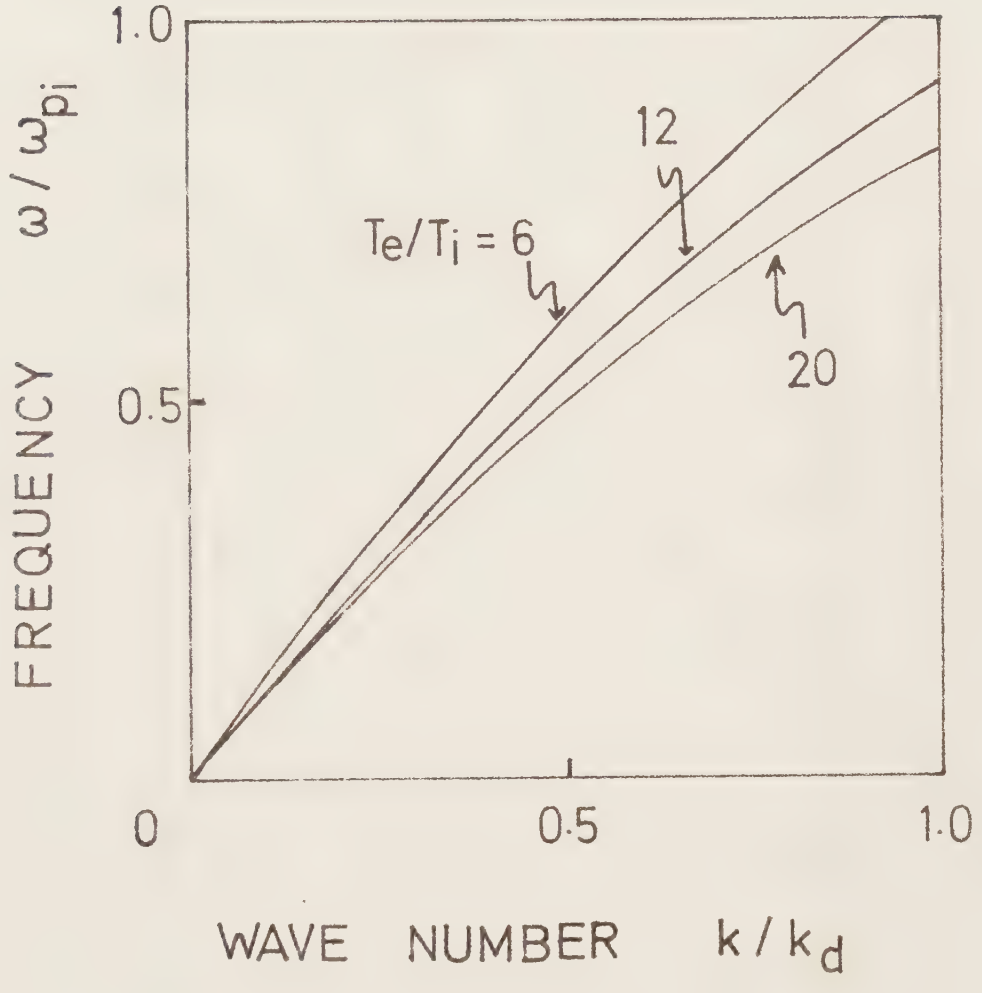


FIGURE 1 Courbe de dispersion de l'onde ionique.

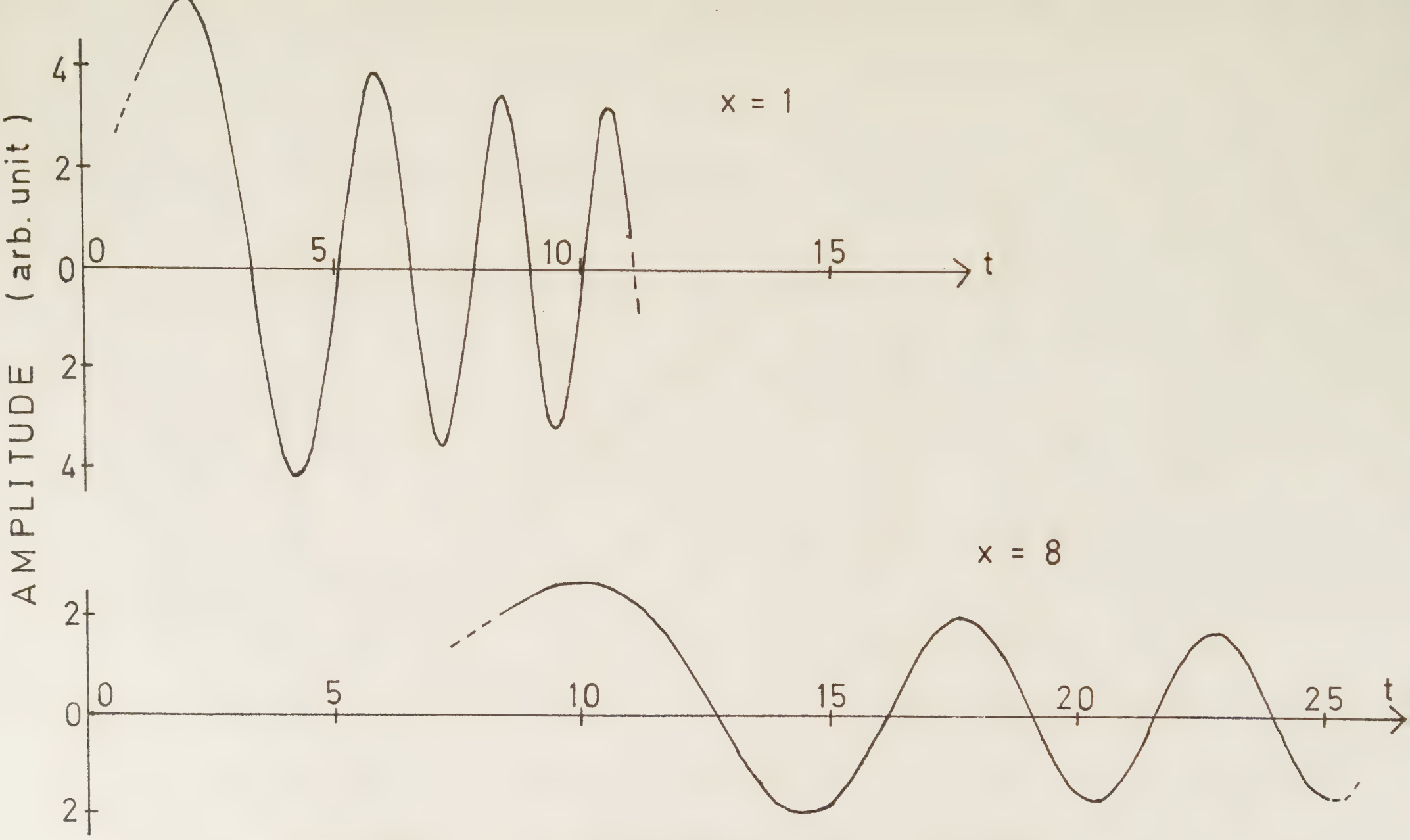


FIGURE 2 Evolution linéaire d'un paquet d'onde ionique

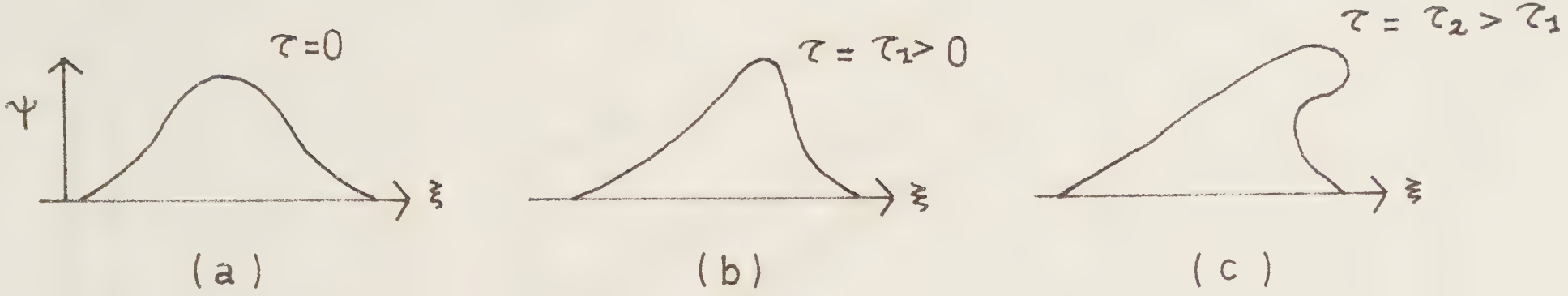


FIGURE 3

Evolution non-linéaire des perturbations decrites par l'équation (I -8) : $\psi_\tau + \psi\psi_\xi = 0$

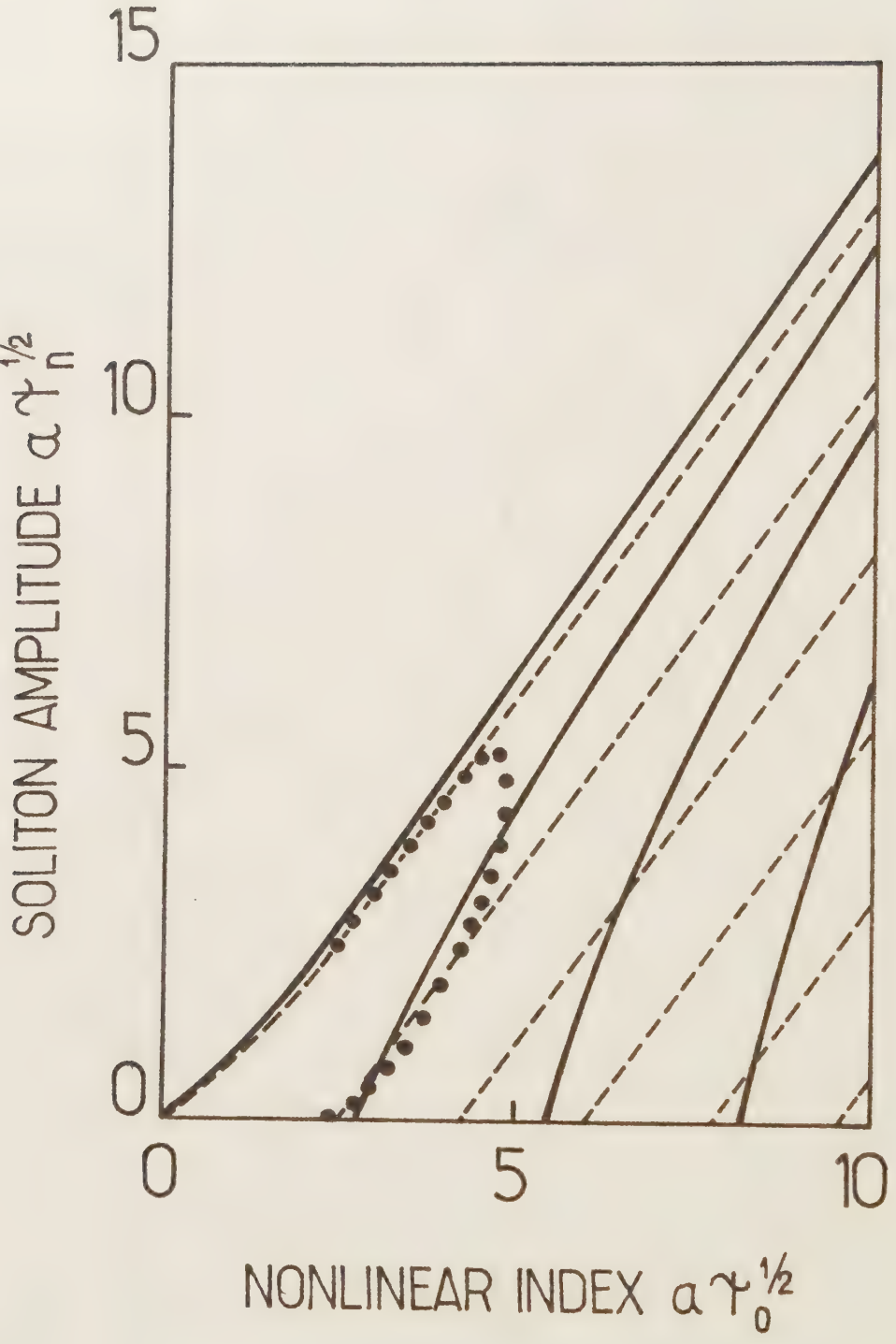


FIGURE 4

Solution de l'équation de K-dV (I-4) odtenue par la méthode de diffusion inverse pour les conditions initiales (I-23) (---) et (I-38) (—). La solution par la méthode des lois de conservation est aussi donnée pour la condition initiale (I-23) (•).

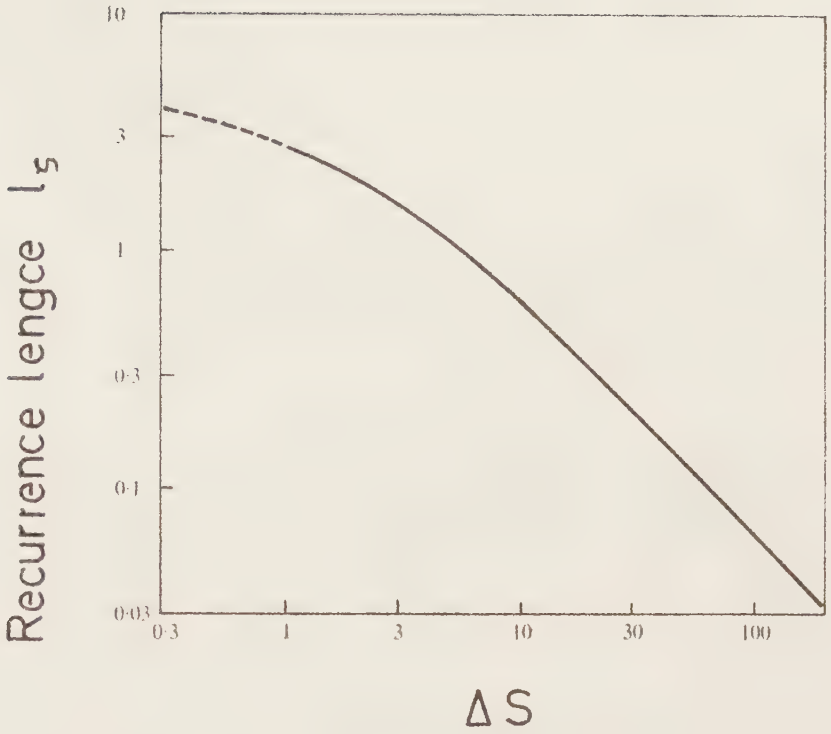


FIGURE 5 Longueur de récurrence ℓ_s en fonction de ΔS

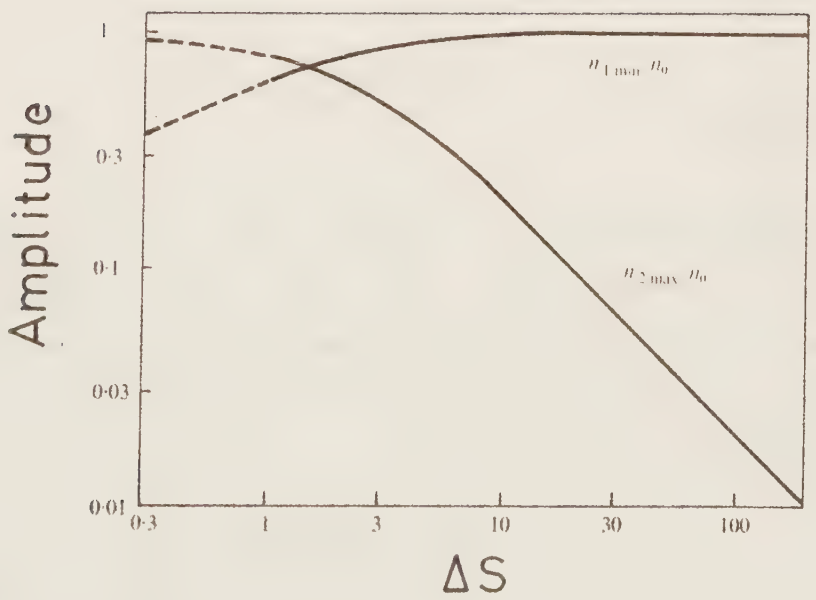


FIGURE 6 Amplitudes du fondamental et du deuxième harmonique en fonction de ΔS

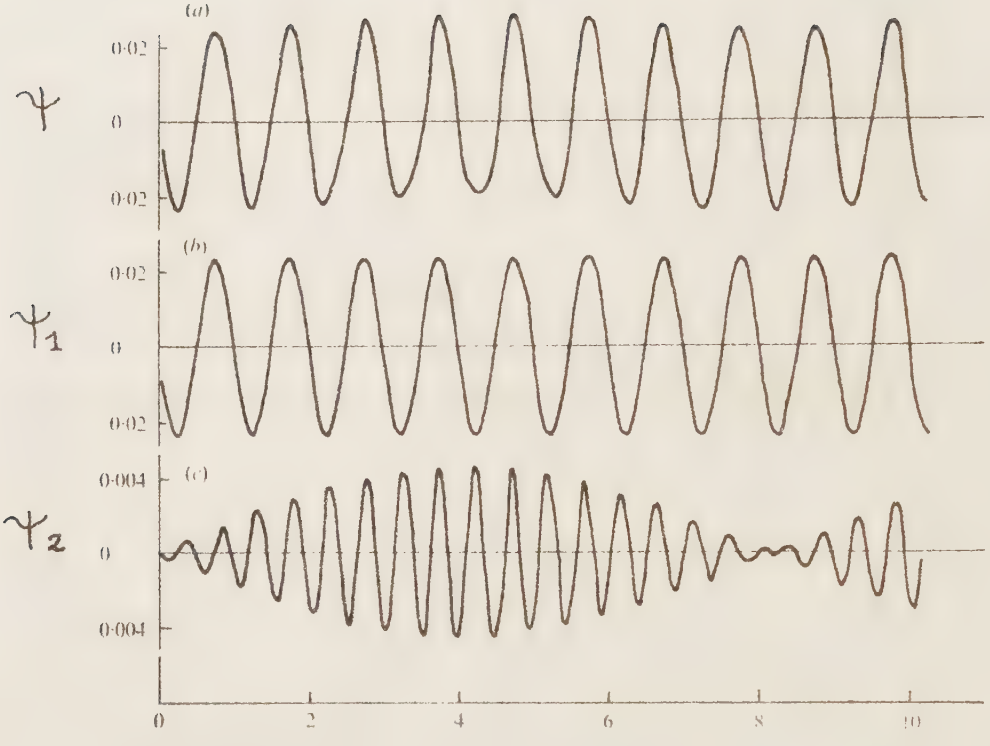


FIGURE 7

Evolution spatiale de l'onde ionique pour $\Delta S = 10$, $\Gamma_{\Delta S}=0$ ($P_2(0)=0$), $\Omega = \omega/\omega_{pi} = 0.2$ et $P_1(0) = 0.024$. (a): Amplitude de l'onde ψ odtenue par la superposition du mode fondamental et du deuxième harmonique. (b): Amplitude de l'onde fondamentale ψ_1. (c): Amplitude du deuxième harmonique ψ_2.

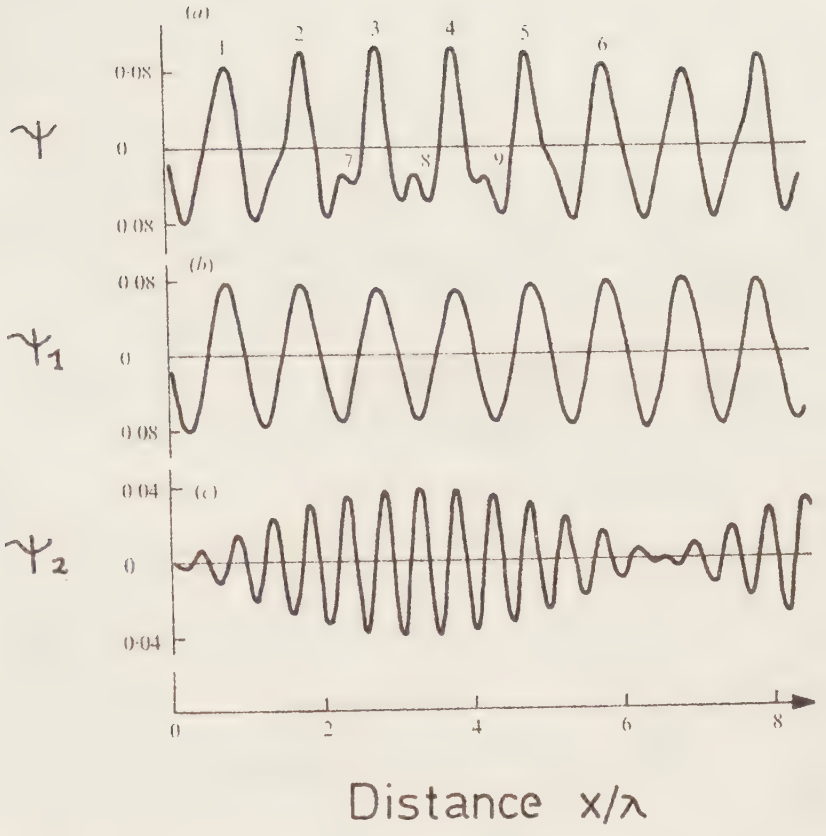


FIGURE 8 Evolution spatiale de l'onde ionique pour $\Delta S=3$, $\Gamma_{\Delta S}=0$, $\mathcal{R}=0.2$ et $P_1(0)=0.08$. (a):Amplitude totale. (b):Amplitude du fondamental. (c):Amplitude du deuxième harmonique.

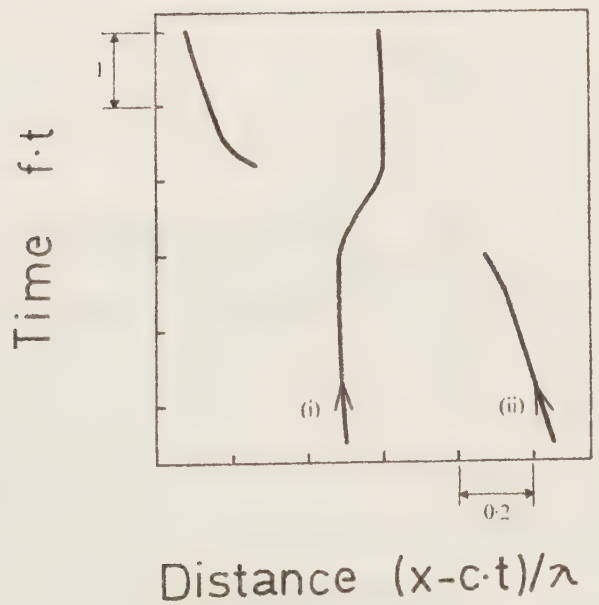
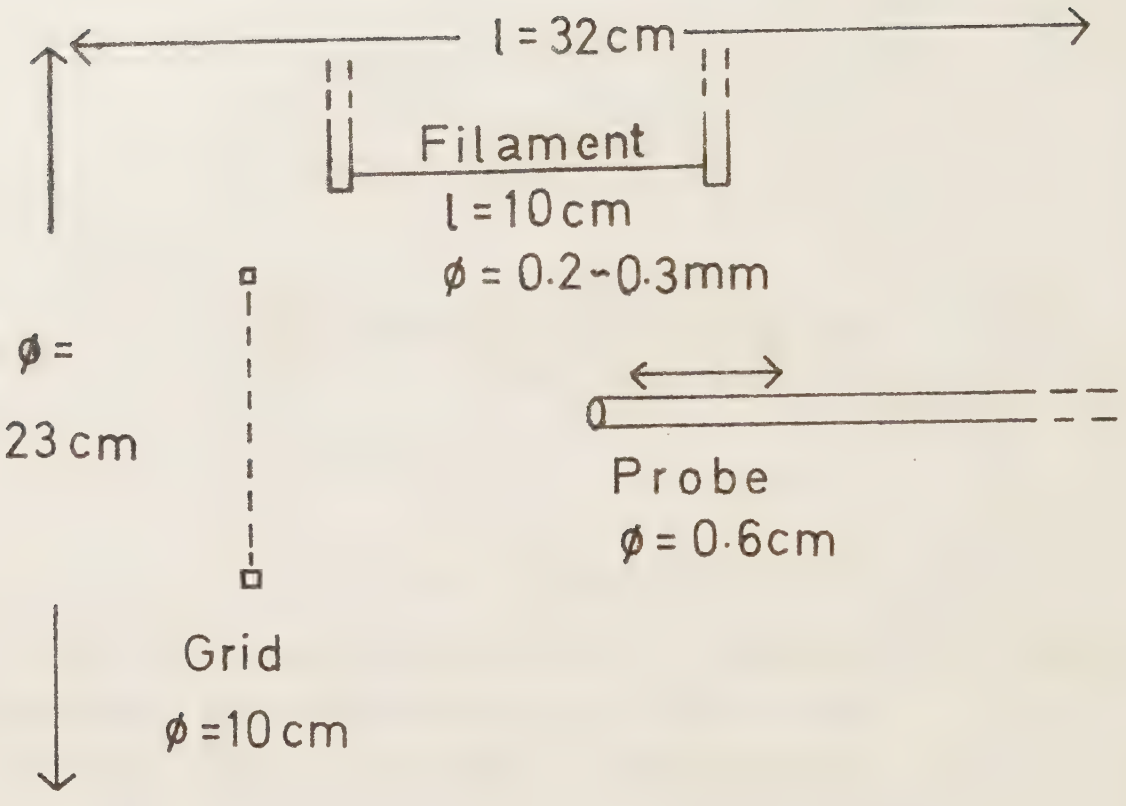


FIGURE 9 Interaction des deux solitons dans un repère de l'onde. $\Delta S=2$, $\Gamma_{\Delta S}=0$, $\mathcal{R}=0.2$, $P_1(0)=0.12$. (i):Trajectoire du soliton de grande amplitude. (ii):Celle du soliton de petite amplitude. La distance et le temps sont, respectivement, normalisés par rapport à la longueur d'onde λ et à la



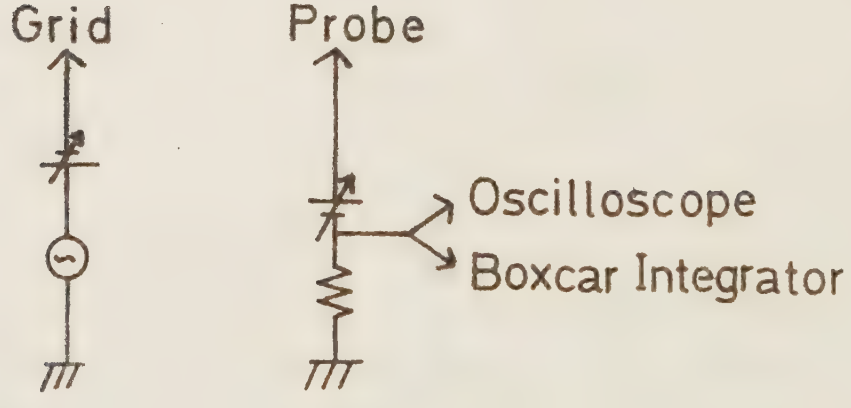


FIGURE 10 Schéma expérimental

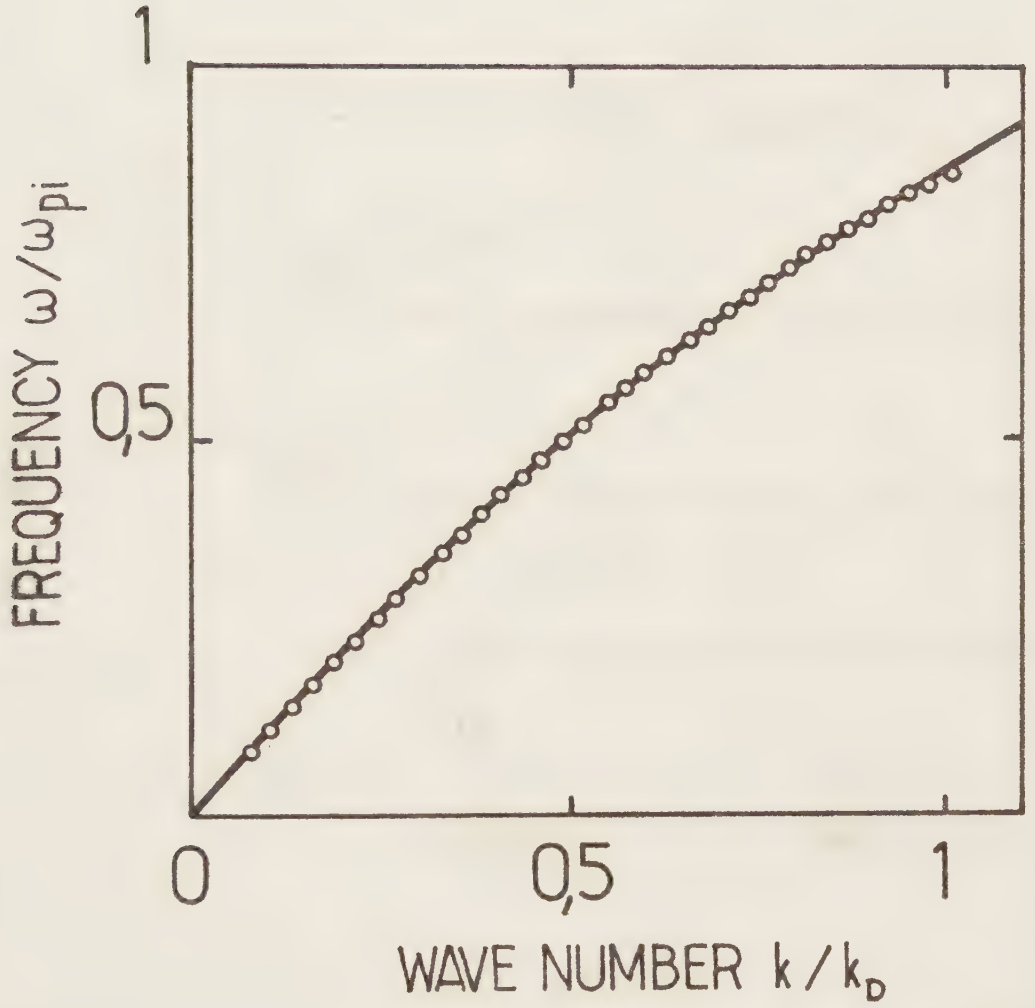


FIGURE 11

Courbe de dispersion de l'onde ionique de petite amplitude.

(——): curbe théorique pour $\sigma = T_e/T_i = 16$.

(O): points expérimentaux.

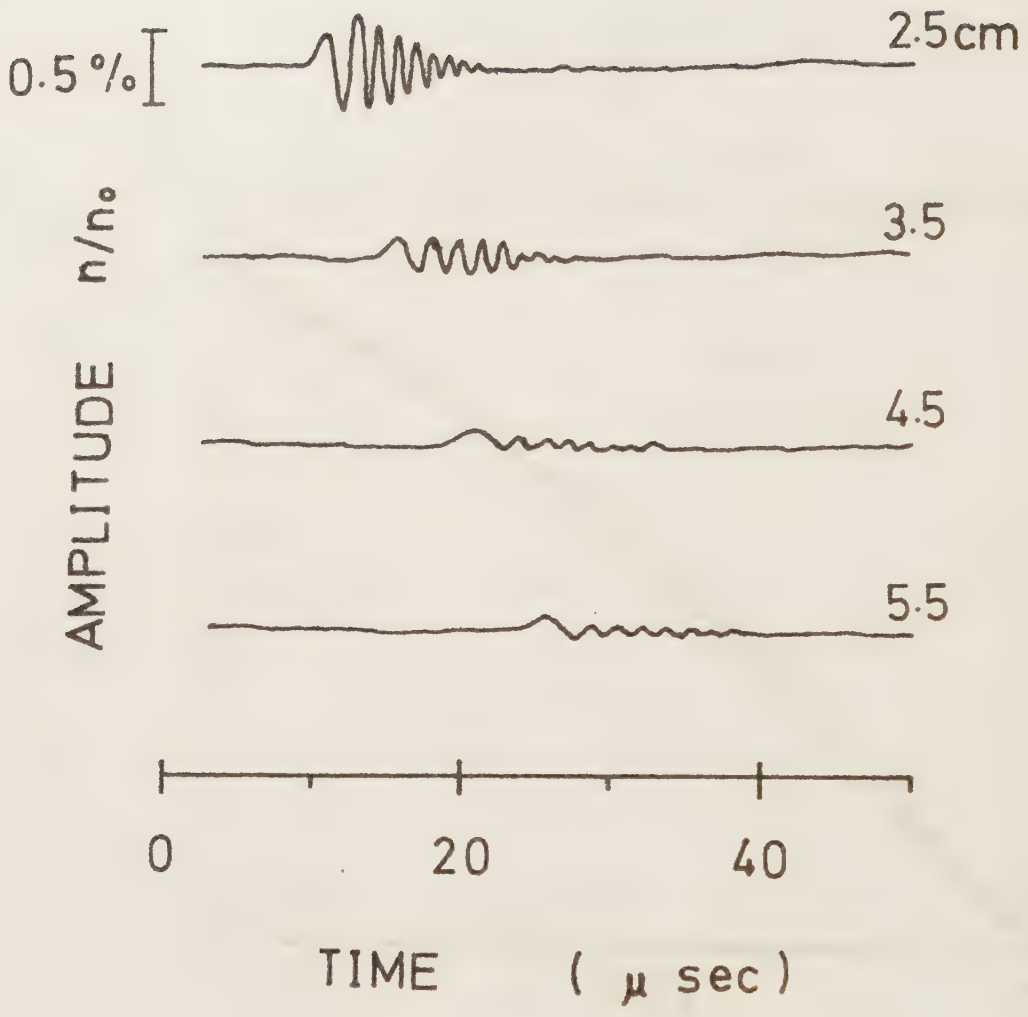


FIGURE 12 Evolution d'un paquet d'onde ionique excité par une fonction éscalier de petite amplitude. $\Delta V = 0.2$ volts.

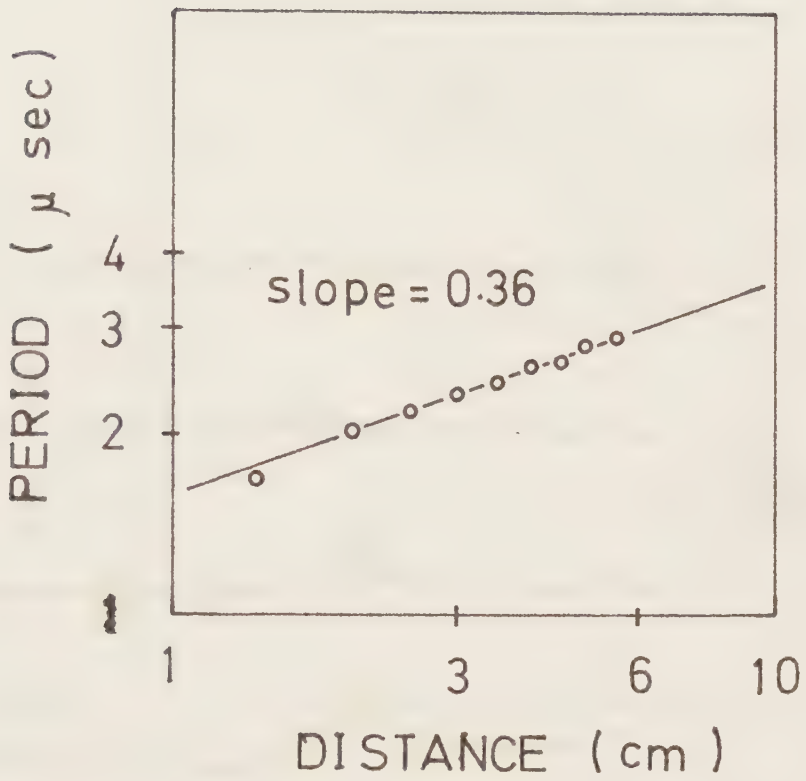


FIGURE 13 Intervalle entre les deux premiers pics du paquet d'onde, obtenue de la Figure 12, en fonction de la distance.

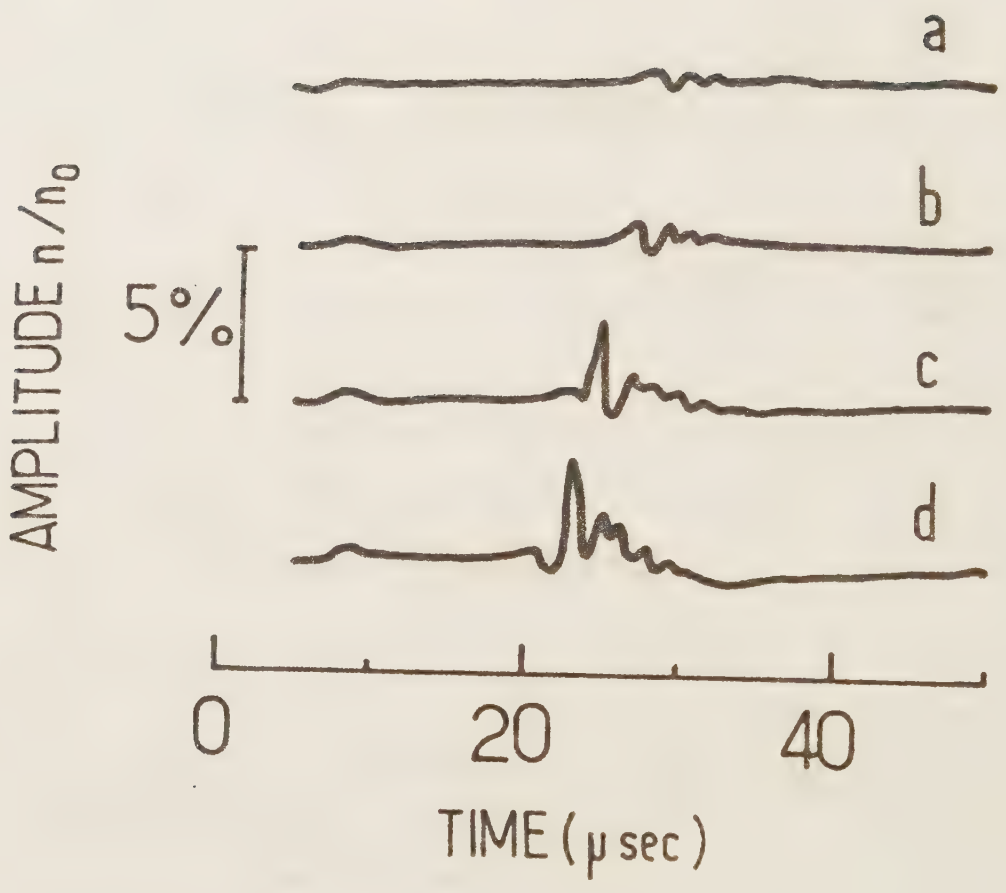


FIGURE 14

Réponses à l'excitation en fonction éscalier observées à 5 cm de la grille pour ΔV = 20 volts. La pression de l'Argon est (a) 4×10^{-4} Torr, (b) 3×10^{-4} Torr, (c) 2×10^{-4} Torr, (d) 1×10^{-4} Torr.

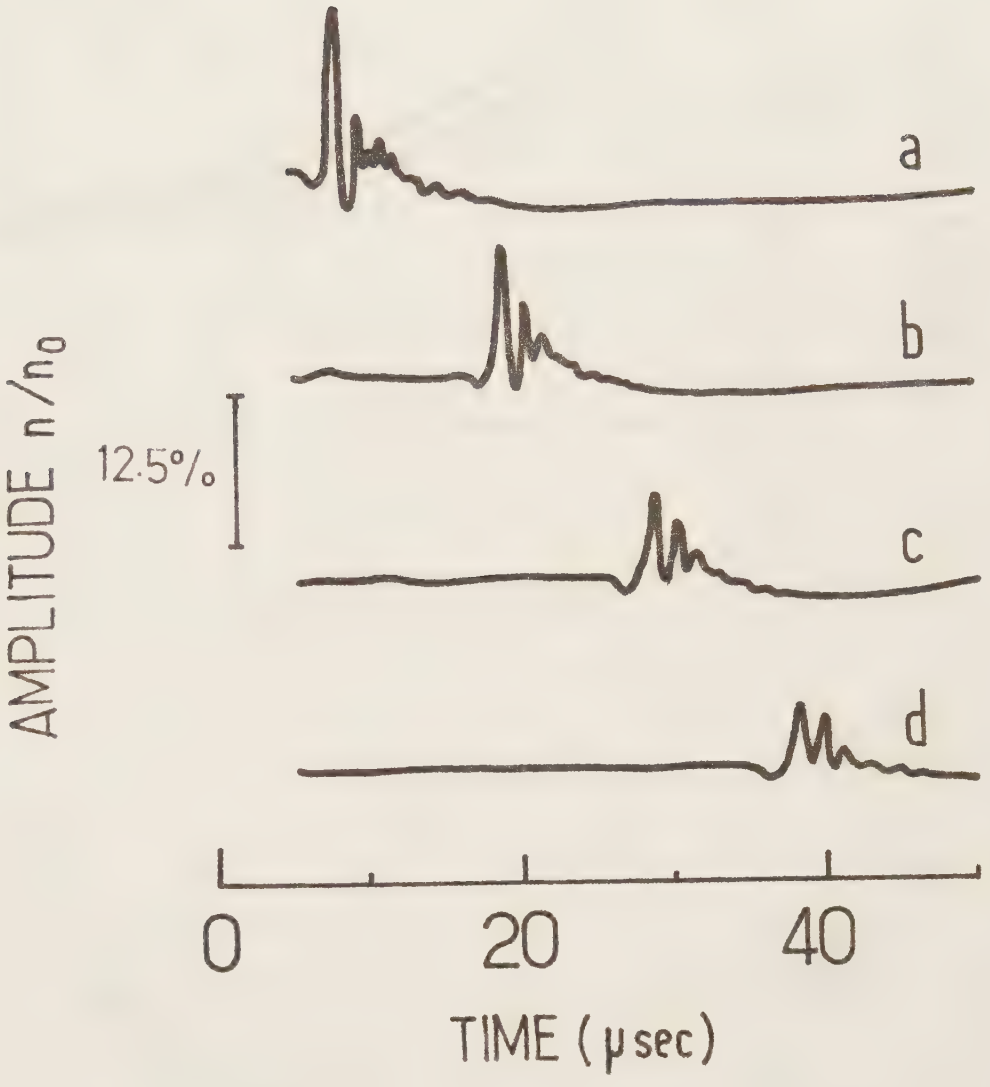
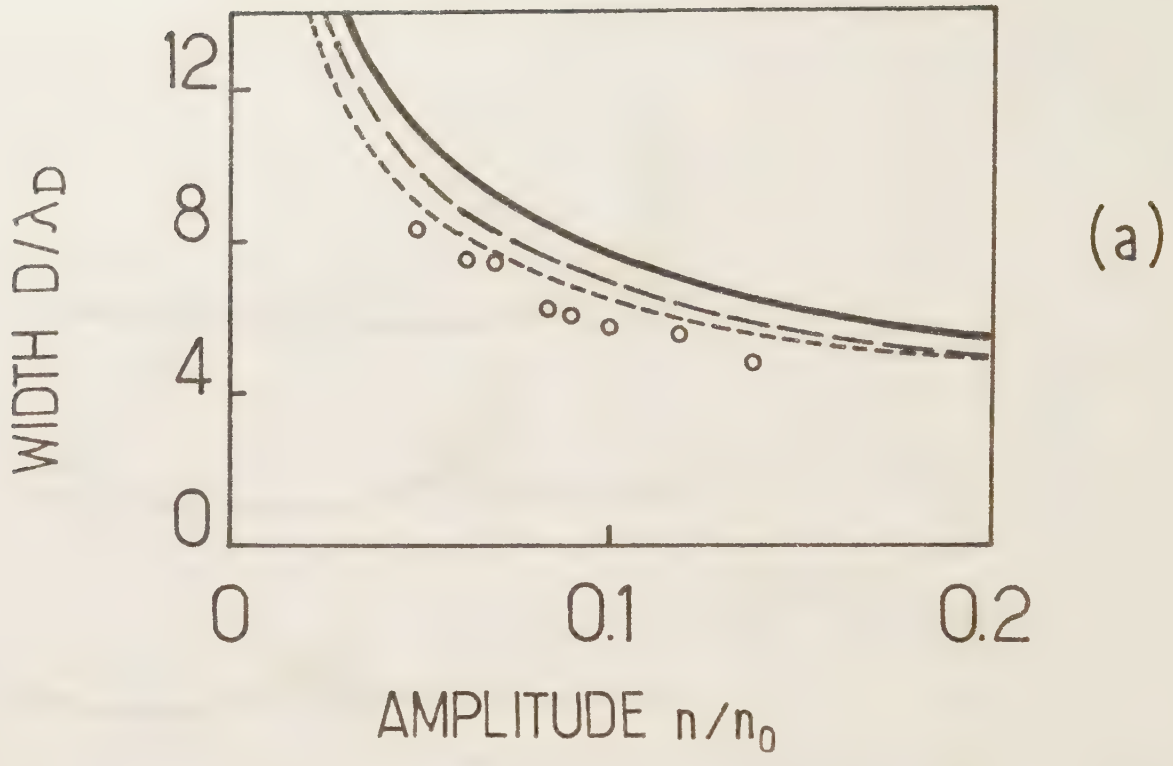


FIGURE 15

Evolution spatiale de la réponse à l'excitation en fonction éscalier et la formation du soliton pour ΔV = 26 volts. Les positions de la sonde par rapport à la grille sont, respectivement, (a): 2cm, (b): 4cm, (c): 6cm et (d): 8cm.



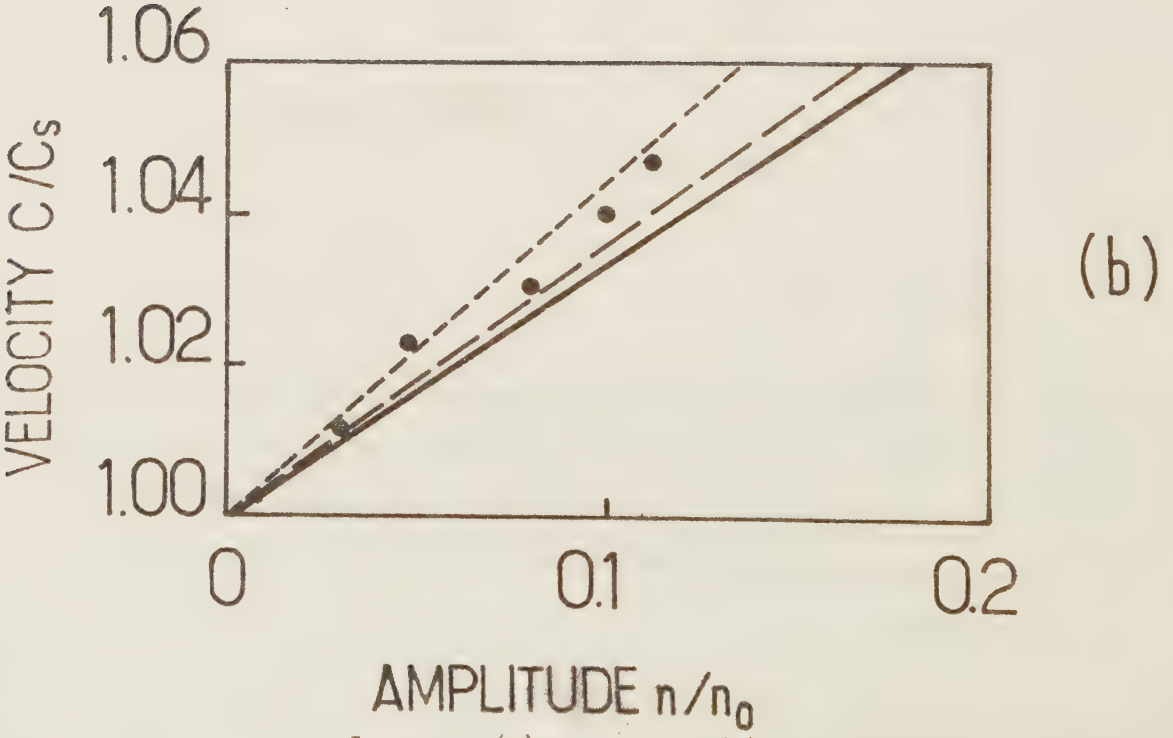


FIGURE 16

Largeur (a) et vitesse (b) du soliton en fonction de l'amplitude. (○) et (●): points expérimentaux. (——): équations (I-10 et 11). (- - -): équations (II-3 et 4). (— —): équations (III-6 et 7).

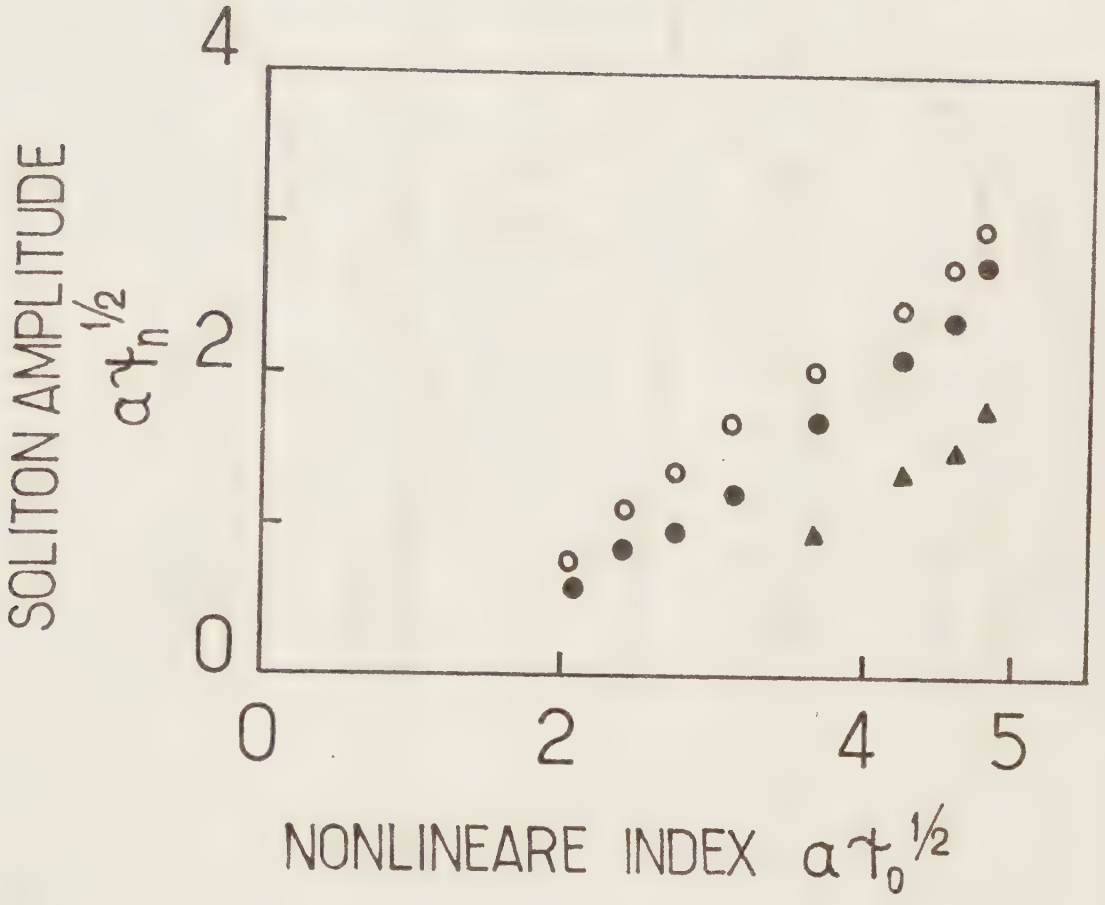


FIGURE 17 Amplitudes experimentales du soliton en fonction de l'indice de la non-linéarité.

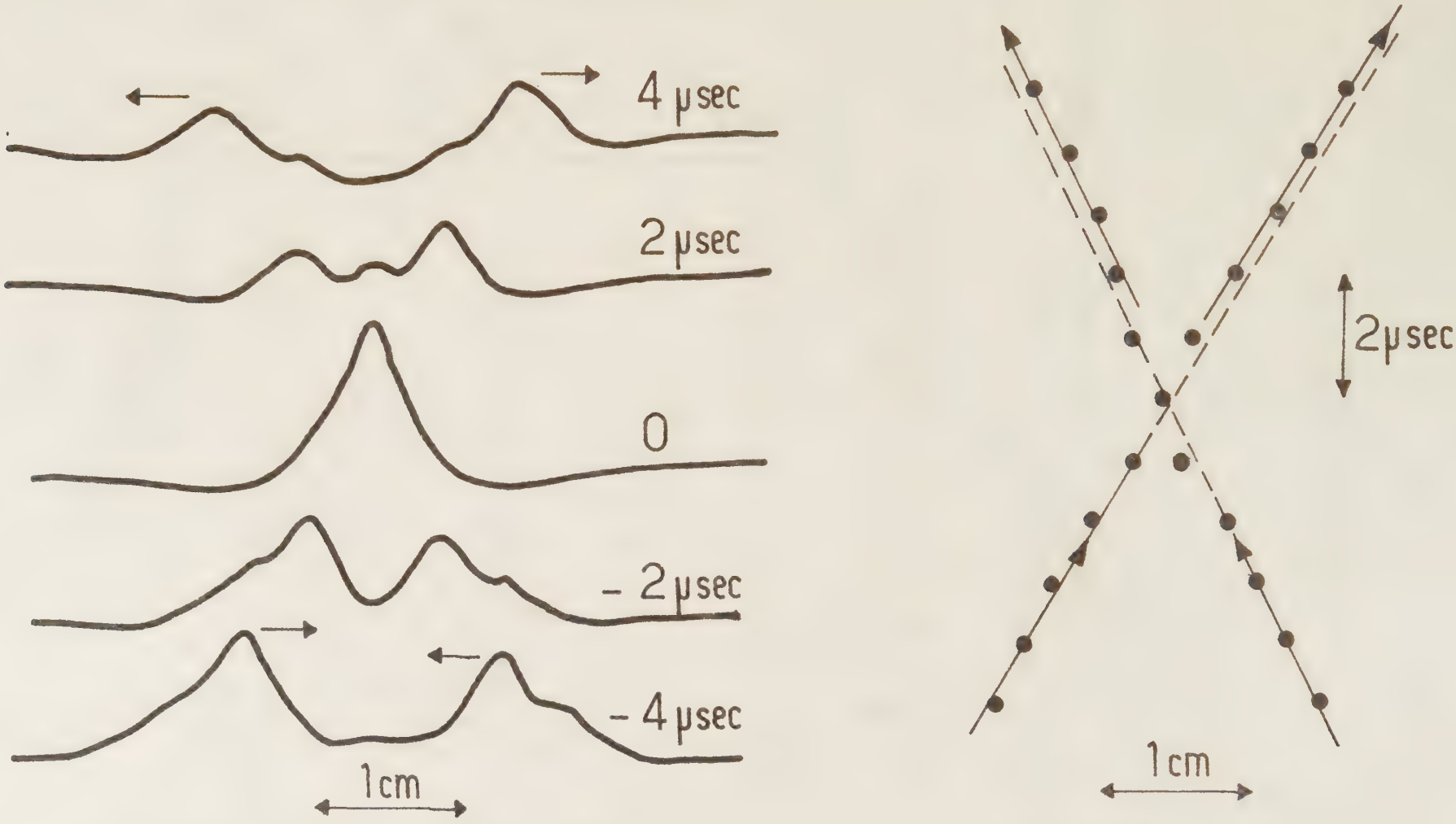


FIGURE 18

Collision de front des deux solitons et leurs traiectoires

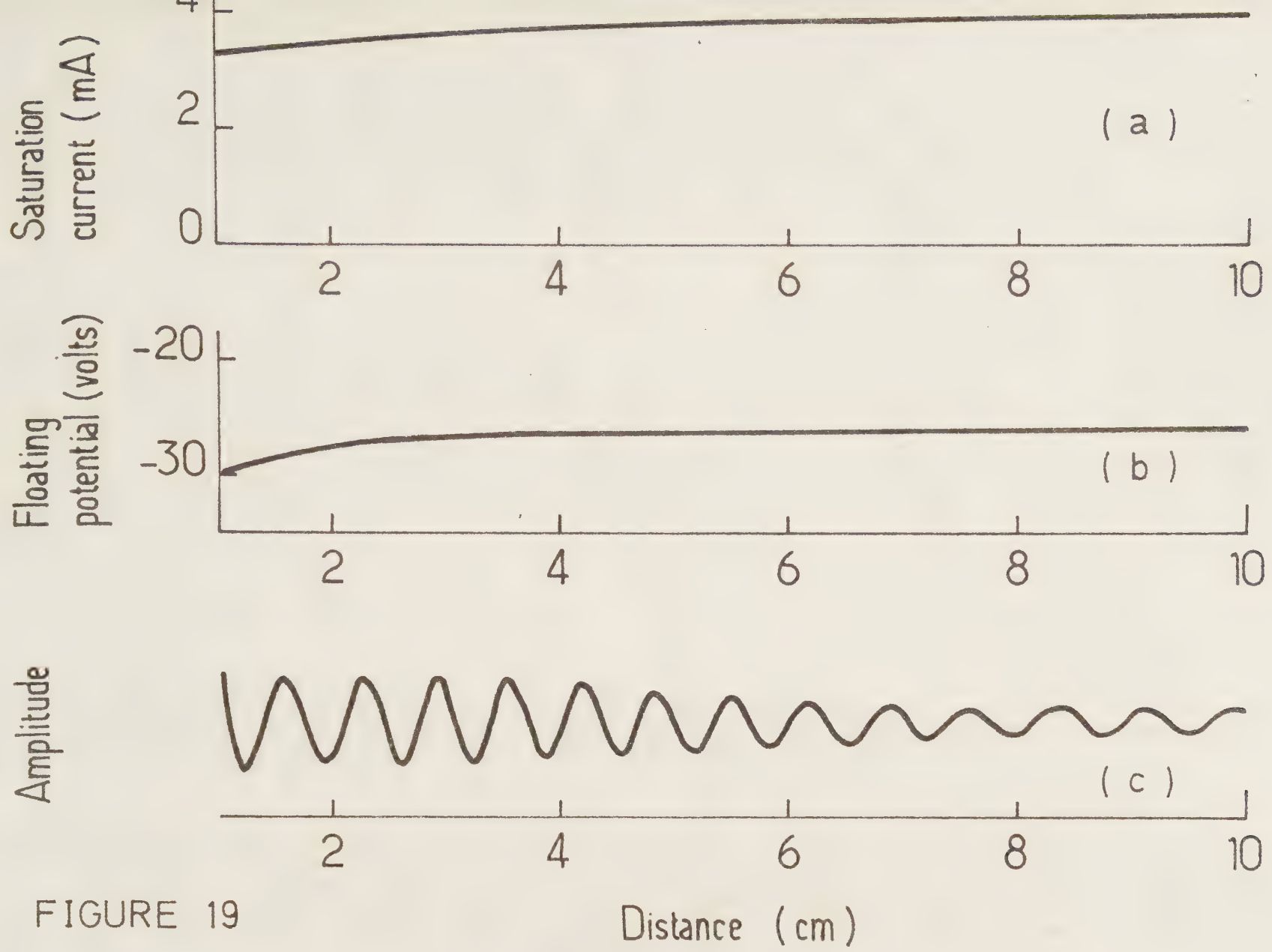


FIGURE 19

Courant de saturation électronique (a) et le potentiel flottant (b) en fonction de la distance à la grille. (c): propagation de l'onde ionique de petite amplitude

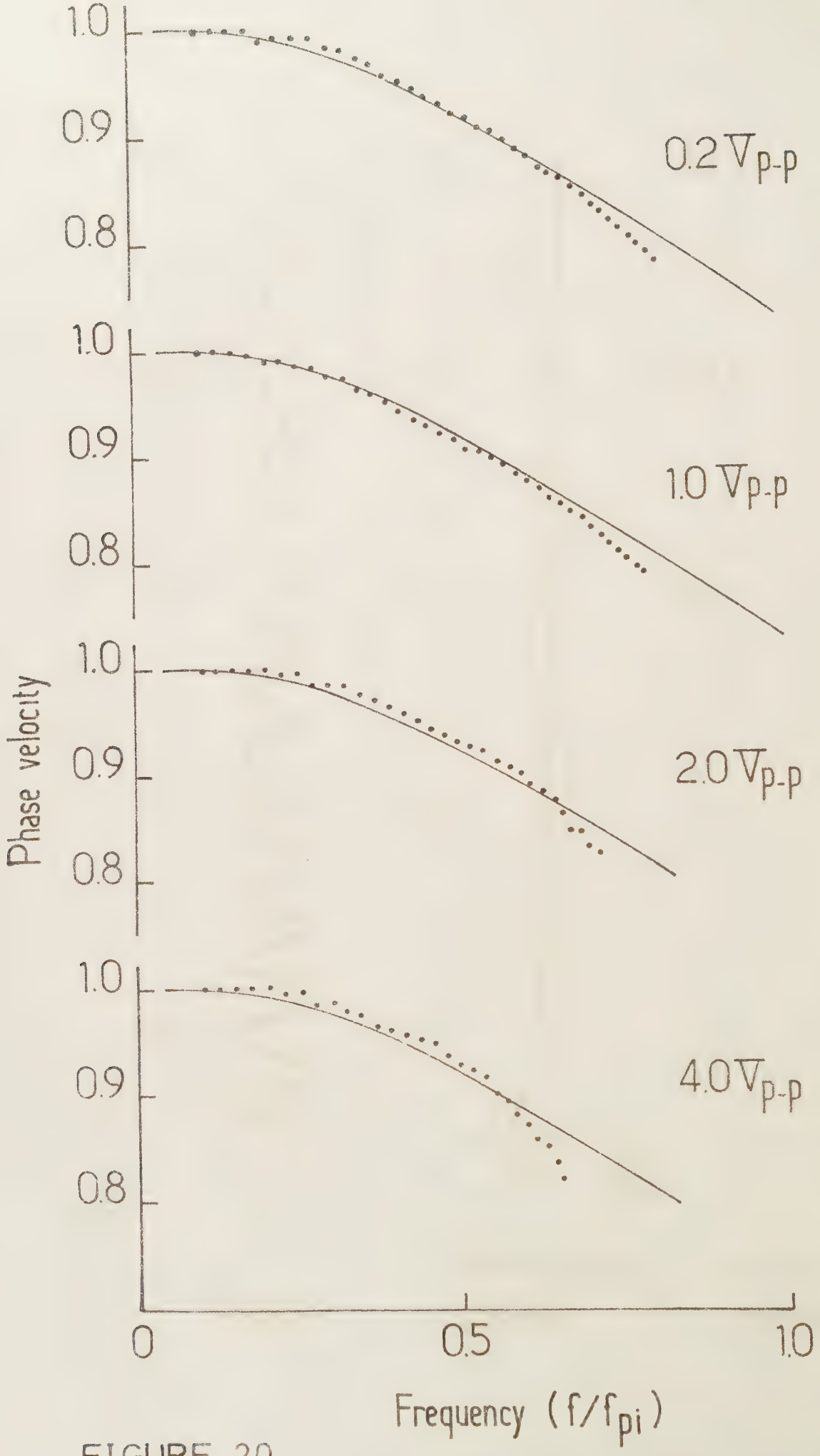


FIGURE 20

Courbe de dispersion en fonction de la tension.

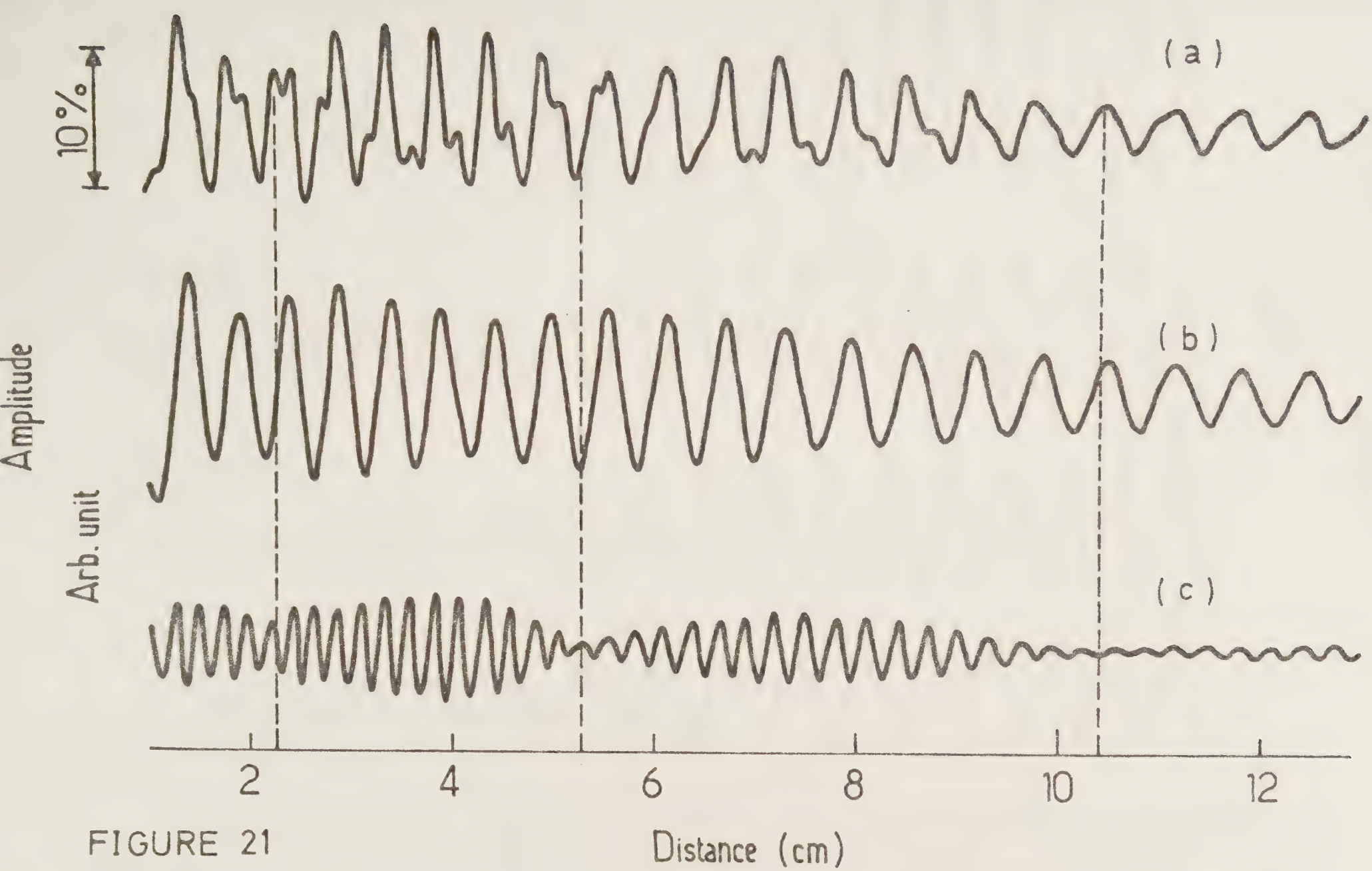


FIGURE 21

(a) : Récurrence de l'onde ionique. (b) : Amplitude du mode fondamental.

(c) : Amplitude du deuxième harmonique

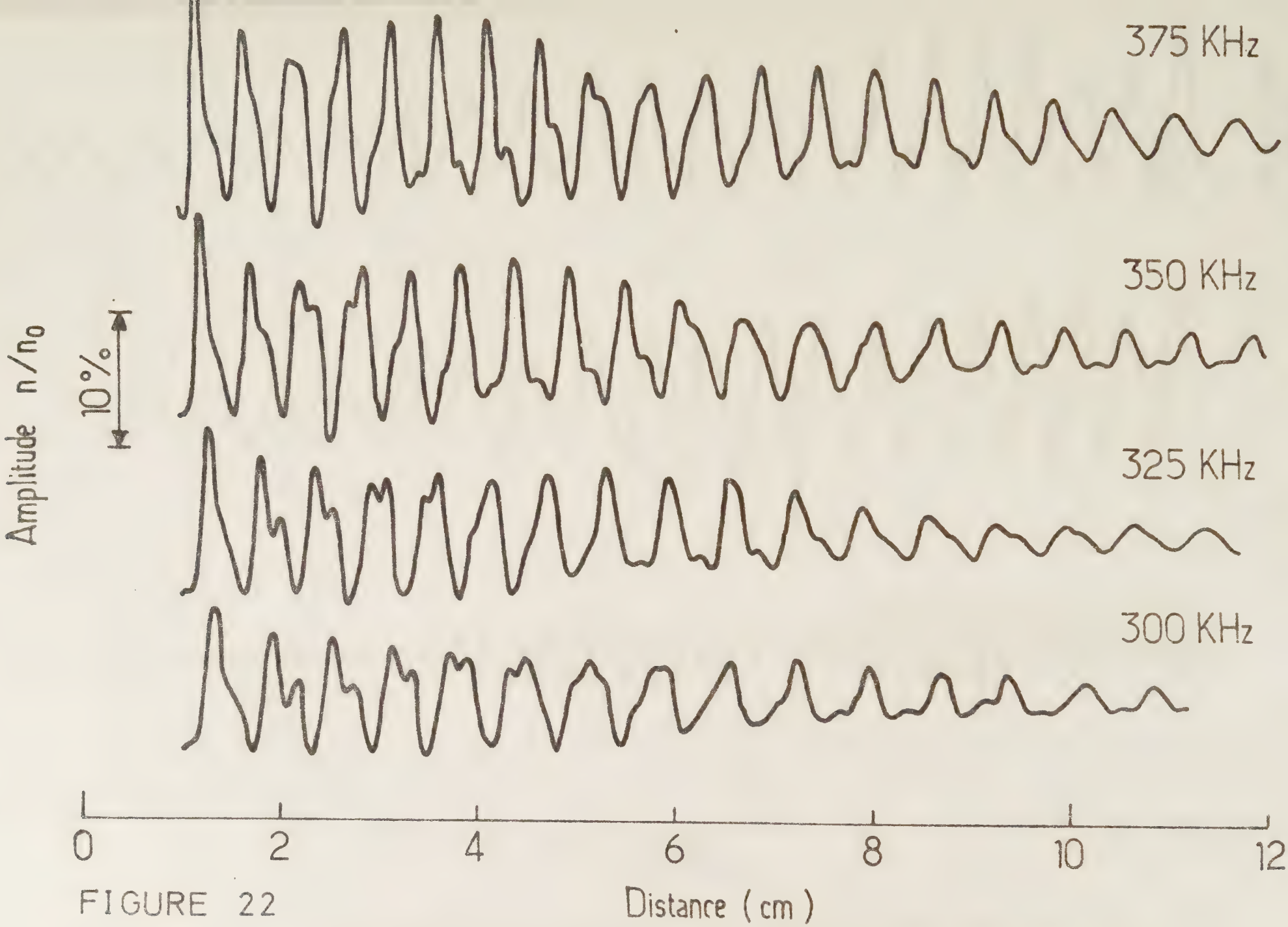


FIGURE 22

Récurrence de l'onde à différentes fréquences pour V_{ex}=4volts et f_{pi}=1.25MHz

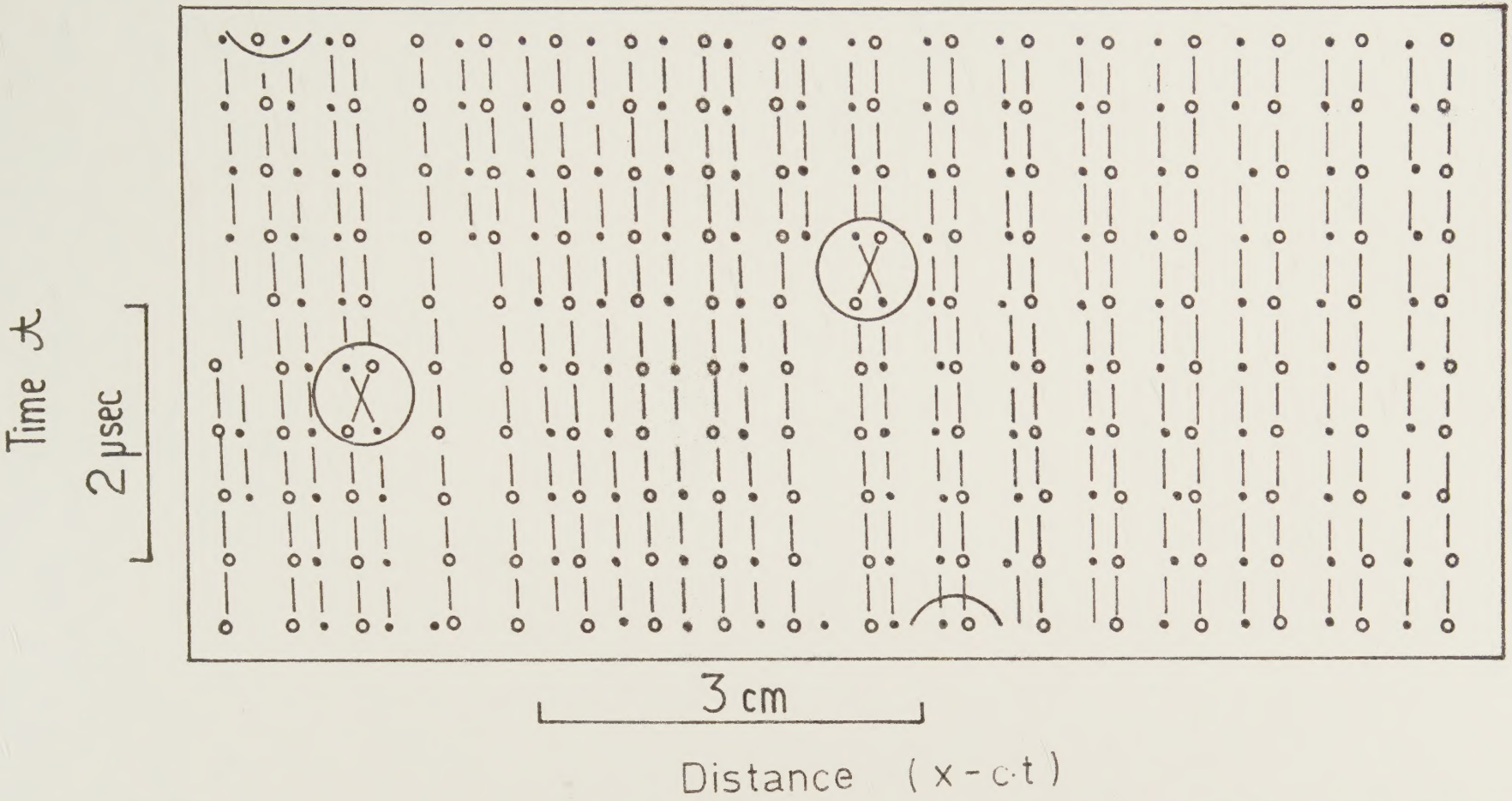
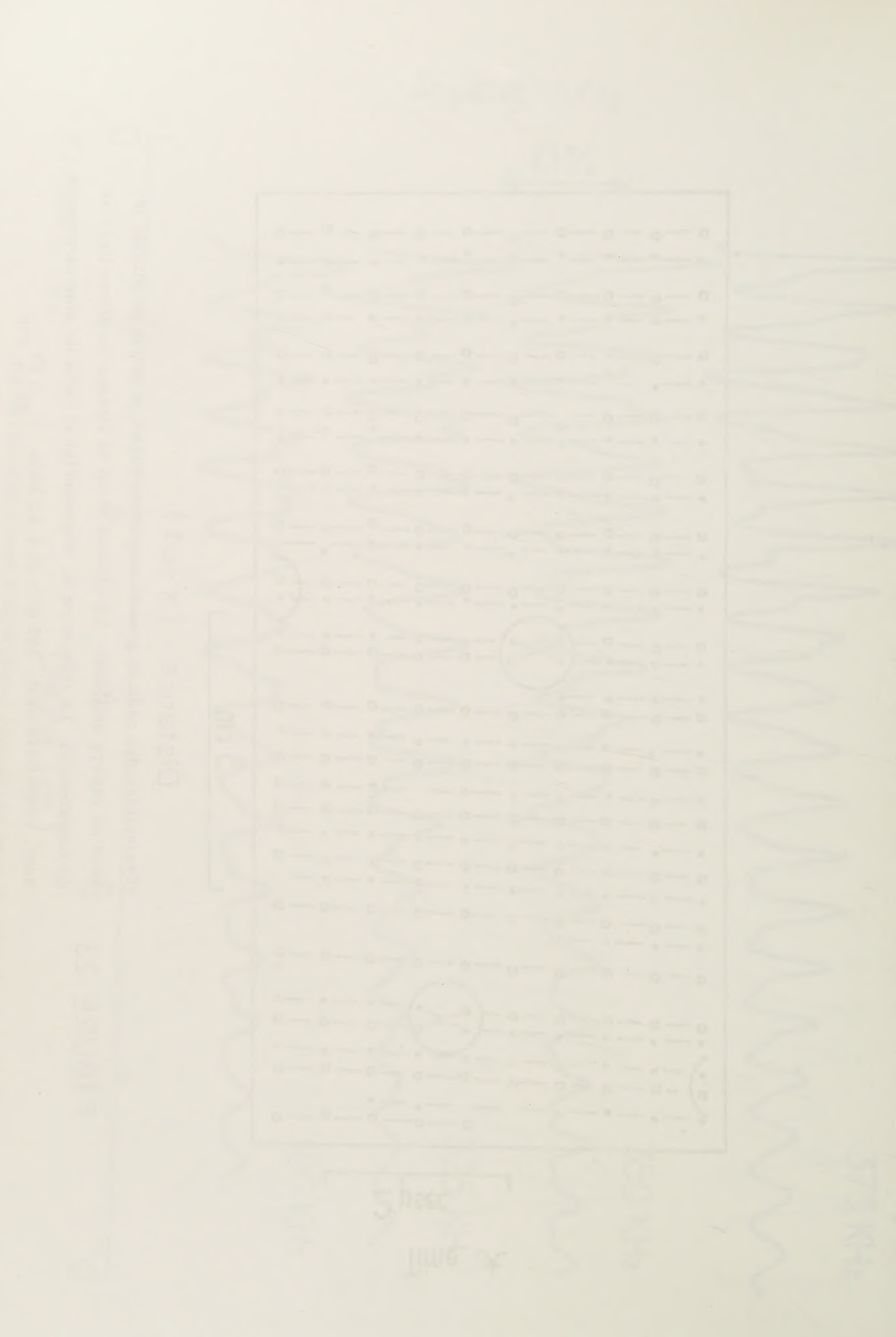


FIGURE 23

Trajectoire des pics de grande amplitude (o) et de petite amplitude (•) dans un repère de l'onde. La vitesse C est la vitesse de phase linéaire du fondamental. La fréquence du fondamental et celle de plasma ionique sont, respectivement, 350 KHz et 1 25 MHz. $V_{ex} = 2V_{p-p}$